Пам'яті видатного вчителя геометрії І. А. Кушніра

XXIX олімпіада з математики Русанівського ліцею

18 квітня 2026

6 клас

1 тур

1. Бабуся подарувала кожному з онуків по декілька яблук та груш. При цьому всім дісталося фруктів порівну. Миколі дісталась п'ята частина всіх яблук і сьома частина всіх груш. Скільки онуків у бабусі?

Розв'язання: Якби онуків було 5, то кожен отримав би п'яту частину всіх фруктів. Але Микола отримав п'яту частину яблук і тільки сьому частину груш, тобто менше, ніж п'яту частину всіх фруктів. Отже, онуків більше ніж 5. Якби онуків було 7, то кожен отримав би сьому частину всіх фруктів. Але Микола отримав п'яту частину яблук, а це більше, ніж сьома частина. Отже, онуків менше ніж 7. Тому бабуся має 6 онуків.
Відповідь: 6 онуків.

2. Серед чисел a, b і c одне додатне, одне від'ємне і одне дорівнює нулю. Відомо, що $a^2 = b^2(b-c)$. Яке з чисел a, b, c дорівнює нулю, яке є додатним, а яке від'ємним?

Розв'язання: Покажемо, що $a \neq 0$. Справді, якщо $a = 0$, то $b^2(b-c) = 0$, звідки $b = 0$ або $b = c$. Це суперечить умові, бо лише одне число дорівнює нулю, а числа b і c є різними. Покажемо, що $b \neq 0$. Справді, якщо $b = 0$, то $a^2 = 0$, тобто $a = 0$, що неможливо. Отже, нулю дорівнює число c. Тоді $a^2 = b^2(b-0) = b^3$. Оскільки $a^2 > 0$, то $b^3 > 0$, а отже $b > 0$. Тому $a < 0$.
Відповідь: $a < 0, b > 0, c = 0$.

3. Цього року з класу пішли один хлопець і одна дівчина, а прийшли нові три хлопця та четверо дівчат. Проте відношення числа дівчат до числа хлопців у класі не змінилося. Чому воно дорівнює?
Розв'язання: Нехай спочатку в класі було Д дівчат і Х хлопців. Після змін стало $\text{Д} + 3$ дівчат та $\text{Х} + 2$ хлопців. Відношення не змінилося, отже $\frac{\text{Д}+3}{\text{Х}+2} = \frac{\text{Д}}{\text{Х}}$. Після спрощень отримуємо $3\text{Х} = 2\text{Д}$. Отже, $\frac{\text{Д}}{\text{Х}} = \frac{3}{2}$.
Відповідь: $\text{Д}/\text{Х} = 3/2$.

4. Покажіть, як розставити у виразі $1 - 2 - 4 - 8 - 16 = 19$ знаки модуля так, аби рівність стала правильною (достатньо навести один варіант).
Розв'язання: Наприклад, так: $\big||1-2| - |4-8| - 16\big| = 19$ або $\big||1-2-4| - 8 - 16\big| = 19$.

5. У Русанівському ліцеї на загальні збори ліцеїстів у конференц-залі не з'явилася рівно одна п'ятнадцята від присутніх у залі. Після того як президент учнівського самоврядування вийшов із залу, кількість відсутніх становила одну чотирнадцяту від присутніх. Скільки всього ліцеїстів навчається у Русанівському ліцеї.
Розв'язання: Спочатку відсутніх було у п'ятнадцять разів більше, ніж присутніх, тому присутні були $\frac{15}{16}$, а відсутні $\frac{1}{16}$ від загальної кількості ліцеїстів. Після того як із зали вийшов президент, присутніх стало $\frac{14}{15}$, а відсутніх — $\frac{1}{15}$ від загальної кількості ліцеїстів. Отже, один президент становить $\frac{1}{15} - \frac{1}{16} = \frac{1}{240}$ частину всіх ліцеїстів. Тому всього у ліцеї 240 ліцеїстів.
Відповідь: 240 ліцеїстів.

2 тур

6. Є дев'ять двоцифрових чисел, у яких немає однакових цифр у розряді десятків і немає однакових цифр у розряді одиниць. Їхню суму поділили на 7 і отримали ціле число. Яке число могли отримати? Знайдіть всі варіанти і поясніть, чому інших немає.

Розв'язання: У розряді десятків стоять усі цифри від 1 до 9, тому сума десятків дорівнює $10 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 450$. У розряді одиниць використано всі цифри від 0 до 9, крім деякої цифри x. Тому сума одиниць дорівнює $45 - x$. Отже, сума всіх чисел дорівнює

$$450 + (45 - x) = 495 - x.$$

Це число ділиться на 7. Оскільки $495 = 490 + 5$, то $x = 5$. Тоді сума чисел дорівнює 490, а $490 : 7 = 70$.

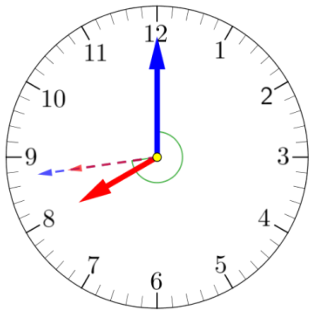
Відповідь: 70.

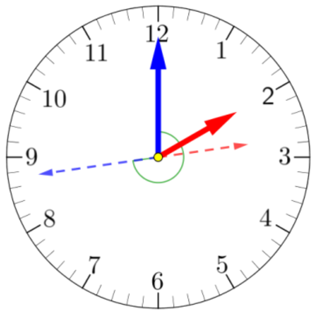
7. Барон Мюнхгаузен пішов на прогулянку між 8 та 9 годинами ранку, коли годинна та хвилинна стрілки годинника збігалися. Він повернувся додому між 2 та 3 годинами дня, коли стрілки були направлені в протилежні сторони. Наскільки довгою була прогулянка Барона?

Розв'язання: Рівно о 8 годині ранку годинна стрілка показує на 8, а хвилинна на 12, тобто годинна стрілка випереджає хвилинну на кут $240°$. Отже до моменту, коли стрілки зустрінуться, хвилинна стрілка має пройти кут на $240°$ більший, ніж годинна. Аналогічно рівно о 2 годині дня годинна стрілка показує на 2, а хвилинна на 12, тобто годинна стрілка випереджає хвилинну на кут $60°$. До моменту, коли стрілки будуть напрямлені в протилежні сторони, тобто хвилинна стрілка випередить годинну на $180°$, хвилинна стрілка має пройти кут на $240°$ більший, ніж годинна. Тому від 8 години ранку до початку прогулянки Барона і від 2 години дня до його повернення додому пройшов однаковий час, тобто прогулянка тривала рівно 6 годин.

Відповідь: 6 годин.

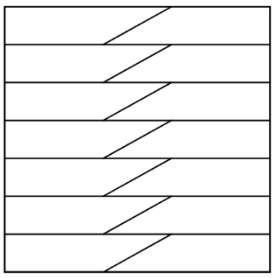
Зауваження. Неважко обчислити точний час початку та завершення прогулянки: 8 год $\frac{480}{11}$ хв та 2 год $\frac{480}{11}$ хв.





8. Як розрізати квадрат на 14 однакових чотирикутників, які не є прямокутниками?

Розв'язання: Розріжемо квадрат на 7 однакових смуг, а потім кожну смугу навскіс, як показано на рисунку.



3 тур

9. Знайдіть всі трійки натуральних чисел (a, b, c), що задовольняють рівняння $a^{20} + b^2 + c^6 = 2026$.

Відповідь: $(1{,}36{,}3)$.

Розв'язання. Спочатку оцінимо a^{20}. Якщо $a \geq 2$, то $a^{20} \geq 2^{20} > 2026$, що неможливо. Тому $a = 1$ і $a^{20} = 1$. Отже, $1 + b^2 + c^6 = 2026$, тобто $b^2 + c^6 = 2025$.

Тепер оцінимо c^6. Помітимо, що $4^6 = 4096 > 2025$, отже $c \leq 3$. Залишилося перебрати випадки $c = 1, 2, 3$:

якщо $c = 1$, то $b^2 = 2025 - 1 = 2024$ — не квадрат (між $44^2 = 1936$ і $45^2 = 2025$).

якщо $c = 2$, то $b^2 = 2025 - 64 = 1961$ — не квадрат (також між 44^2 і 45^2).

якщо $c = 3$, то $b^2 = 2025 - 729 = 1296 = 36^2$, тобто $b = 36$.

Отже, єдина трійка це $(a, b, c) = (1, 36, 3)$.

10. У клубі шахів займаються дівчата та хлопці — всього 58 дітей. Одного разу кожна дівчина принесла 15 яблук і роздала їх хлопцям. Кожний хлопець приніс 14 яблук і роздав їх дівчатам. Відомо, що всі дівчата отримала однакову кількість яблук і всі хлопці отримали однакову кількість яблук. Скільки в клубі дівчат та скільки хлопців? Наведіть усі можливі варіанти і покажіть, що інших немає.
Розв'язання: Нехай у клубі x дівчат та $58 - x$ хлопців. Усі дівчата разом принесли $15x$ яблук, а усі хлопці $14(58 - x)$ яблук. Тому $15x$ ділиться на $58 - x$, а $14(58 - x)$ на x. Звідси x — дільник числа $14 \cdot 58$ та $x < 58$. Розкладемо $14 \cdot 58$ на прості множники $14 \cdot 58 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 29$. Маємо такі варіанти числа x: 1, 2, 7, 14, 28, 29. Перебором встановлюємо, що $15x$ ділиться на $58 - x$ лише у випадках $x = 28$ та $x = 29$. Тому у клубі 28 або 29 дівчат та відповідно 30 або 29 хлопців.
Відповідь: 28 дівчат та 30 хлопців або 29 дівчат і 29 хлопців.

Пам'яті видатного вчителя геометрії І. А. Кушніра

XXIX олімпіада з математики Русанівського ліцею

18 квітня 2026

7 клас

1 тур

1. У Василя є 8 карток з цифрами 1, 2, 3 і 4 — по дві з кожною цифрою. Він хоче скласти з них восьмизначне число так, щоб між двома одиницями знаходилась одна цифра, між двійками — дві цифри, між трійками — три, а між четвірками — чотири. Вкажіть яке-небудь число, яке може отримати Василь.

Відповідь: 41312432 або 23421314.

Розв'язання. Легко перевірити, що число 41312432 задовольняє умову.

Зауваження. Покажемо, як знайти всі числа, що задовольняють умову. У числі мають бути фрагменти 4****4 та 3***3. Для фрагмента з трійками не вистачає місця ні між четвірками, ні перед ними, ні після них. Тому рівно одна трійка має стояти між четвірками. Якщо друга трійка стоїть після четвірок, дістаємо варіанти 4*3**43*, *4*3**43 та 4**3*4*3. Розмістити одиниці та двійки потрібним чином вдається лише в одному з них, при цьому дістаємо число 41312432. Аналогічний перебір варіантів для випадку, коли друга трійка стоїть перед четвірками, дає ще одну відповідь 23421314.

2. (*Олександр Кожем'яка*) Якщо закреслити декілька перших цифр простого числа p, отримаємо число, яке є четвертим степенем деякого натурального числа. Знайдіть останню цифру числа p.

Відповідь: 1.

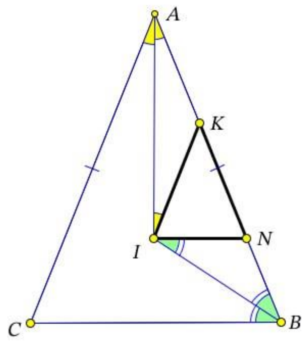
Розв'язання. Нехай після прибирання кількох перших цифр простого числа p отримаємо n^4. Оскільки $p \neq 2$ та $p \neq 5$, спільна остання цифра чисел p та n^4 не може бути парною і не може дорівнювати 5. Тому n — непарне число, яке не ділиться на 5, його останньою цифрою можуть бути лише 1, 3, 7 або 9. Помітимо, що $1^4 = 1$, $3^4 = 81$, $7^4 = 49^2 = 2401$ та $9^4 = 81^2 = 6561$. Таким чином, останньою цифрою числа n^4 може бути лише 1. Отже, остання цифра числа p дорівнює 1.

3. (*Григорій Філіпповський*) Точка I — інцентр рівнобедреного трикутника ABC $(AB = AC)$. На стороні AB відмітили точки K та N так, що $IK \parallel AC$ та $IN \parallel BC$. Відомо, що периметр трикутника IKN дорівнює n, а периметр трикутника ABC дорівнює $2p$. Знайдіть довжину сторони BC.

Відповідь: $\mathrm{BC} = 2\mathrm{p} - 2\mathrm{n}$.

Відповідь: $BC = 2p - 2n$.

Розв'язання. Проведемо бісектриси AI та BI. З паралельності AC і IK випливає рівність внутрішніх різносторонніх кутів:



$$\angle AIK = \angle IAC = \angle IAK.$$

Отже, трикутник IKA рівнобедрений та $AK = IK$. Аналогічно $NB = NI$. Тому

$$AC = AB = AK + KN + NB = IK + KN + NI = n$$

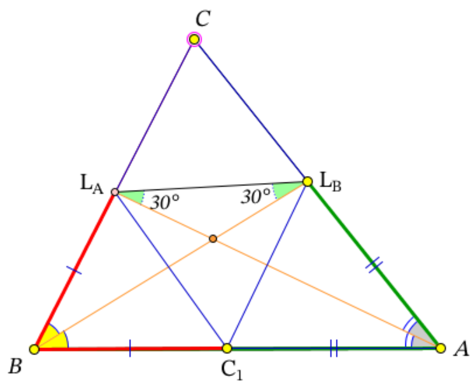
та $BC = 2p - 2n$.

4. (*Тарас Тимошкевич*) У трикутнику ABC провели бісектриси AL_A та BL_B. Відомо, що $AL_B + BL_A = AB$.
а) Знайдіть кут BCA.

б) Чи обов'язково трикутник ABC є рівнобедреним?

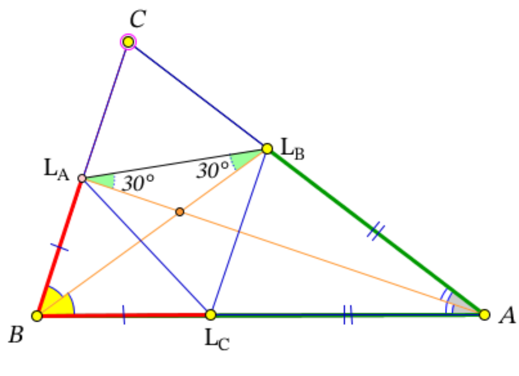
Відповідь: а) $\angle BCA = 60°$; б) ні.

Розв'язання. а) Візьмемо точку C_1 на стороні AB таку, що $BC_1 = BL_A$ та $AC_1 = AL_B$. Трикутники BC_1L_A та AC_1L_B рівнобедрені, отже прямі BL_B і AL_A є серединними перпендикулярами до відрізків C_1L_A і C_1L_B відповідно. Окрім того зазначимо, що точка L_B рівновіддалена від точок L_A і C_1, а точка L_A рівновіддалена від точок L_B і C_1. Отже, трикутник $L_AC_1L_B$ – рівносторонній, а $\angle L_BL_AA = \angle L_AL_BB = 30°$ (як половини кутів рівностороннього трикутника) .



Оскільки $\angle L_AL_BC = 30° + \frac{\angle A}{2}$ та $\angle L_BL_AC = 30° + \frac{\angle B}{2}$ (як зовнішні кути трикутників L_AL_BA та BL_AL_B), то $\angle C = 180° - \left(30° + \frac{\angle A}{2}\right) - \left(30° + \frac{\angle B}{2}\right) = 120° - \frac{\angle A + \angle B}{2}$. Окрім того зазначимо, що $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. А тому $\angle A + \angle B = 120°$ та $\angle C = 60°$.

б) Якщо трикутник ABC рівнобедрений і внаслідок а) має кут $60°$, то він має бути рівностороннім. Покажемо, як побудувати трикутник ABC, що задовольняє умову та не є рівностороннім. Візьмемо рівносторонній трикутник $L_AL_BL_C$, проведемо бісектриси кутів L_A і L_B, а потім пряму через точку L_C, яка проходить зовні трикутника $L_AL_BL_C$, не паралельна цим бісектрисам і не перпендикулярна бісектрисі кута L_C. Точки перетину бісектрис з проведеною прямою назвемо A і B відповідно, а точку перетину прямих BL_A і AL_B назвемо C. За побудовою прямі AL_A, BL_B є серединними перпендикулярами до L_CL_A та L_CL_B, тому вони є бісектрисами кутів A, B, а також $AB = AL_C + L_CB = AL_B + L_AB$. Побудований трикутник ABC задовольняє умову задачі і не є рівностороннім, інакше бісектриси кутів трикутника $L_AL_BL_C$ були б висотами трикутника ABC, а пряма BA за побудовою не перпендикулярна до бісектриси кута L_C.



5. Знайдіть всі трійки натуральних чисел (a, b, c), що задовольняють рівняння $a^{20} + b^2 + c^6 = 2026$.

Відповідь: $(1{,}36{,}3)$.

Розв'язання. Спочатку оцінимо a^{20}. Якщо $a \geq 2$, то $a^{20} \geq 2^{20} > 2026$, що неможливо. Тому $a = 1$ і $a^{20} = 1$. Отже, $1 + b^2 + c^6 = 2026$, тобто $b^2 + c^6 = 2025$.

Тепер оцінимо c^6 . Помітимо, що $4^6 = 4096 > 2025$, отже $c \leq 3$. Залишилося перебрати випадки $c = 1, 2, 3$:

якщо $c = 1$, то $b^2 = 2025 - 1 = 2024$ — не квадрат (між $44^2 = 1936$ і $45^2 = 2025$).

якщо $c = 2$, то $b^2 = 2025 - 64 = 1961$ — не квадрат (також між 44^2 і 45^2).

якщо $c = 3$, то $b^2 = 2025 - 729 = 1296 = 36^2$, тобто $b = 36$.

Отже, єдина трійка це $(a, b, c) = (1, 36, 3)$.

2 тур

6. (*Михайло Сидоренко*) На площині задано трикутник ABC і точку P такі, що $PA = BC$, $PB = AC$ та $PC = AB$. Знайдіть найбільший кут трикутника ABC.

Відповідь: 90°.

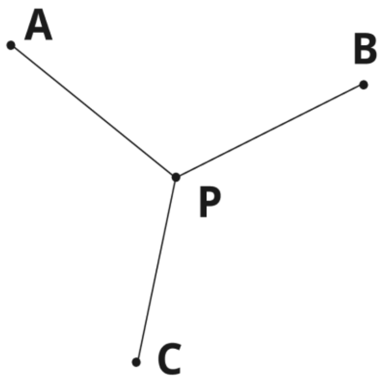
Розв'язання. Трикутники BAP, CPA, PCB та ABC рівні за трьома сторонами. Тому кути $\angle BPC, \angle APC, \angle APB$ рівні відповідно кутам $\angle A, \angle B, \angle C$ трикутника ABC. В залежності від розташування променів PA, PB та PC можливі два випадки.

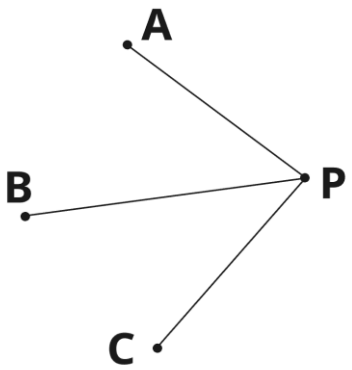
1) Жоден з цих променів не лежить між двома іншими. Тоді

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle BPC + \angle APC + \angle APB = 360°,$$

але сума кутів трикутника дорівнює 180°, а не 360°, суперечність.

2) Один з променів лежить між двома іншими. Нехай для визначеності це промінь PB.





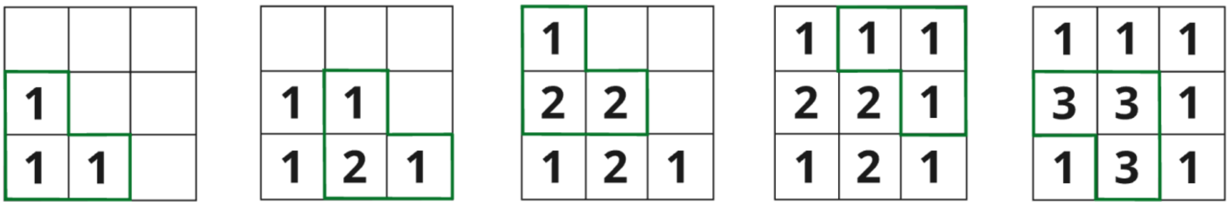
Тоді $\angle APC = \angle BPC + \angle APB$, тобто $\angle B = \angle A + \angle C$. Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то у цьому випадку $\angle B = 90°$.

Зауваження. Будь-який прямокутний трикутник ABC можна доповнити до прямокутника. Якщо P — четверта вершина цього прямокутника, то неважко показати, що $PA = BC$, $PB = AC$ та $PC = AB$.

7. Спочатку всі клітинки дошки розміру 9×5 є білими. За один хід дозволяється обрати довільний квадрат 2×2 і змінити колір усіх його клітинок, крім лівої нижньої або правої верхньої, на протилежний (білий на чорний, чорний на білий). Чи можна за допомогою таких ходів отримати дошку, всі клітинки якої є чорними?

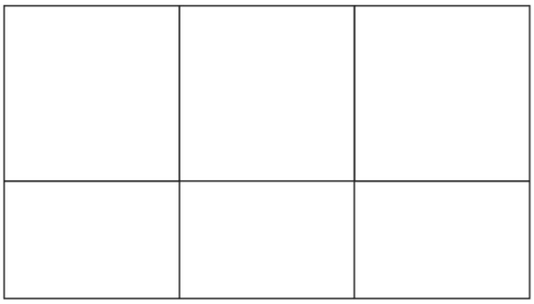
Відповідь: так.

Розв'язання. Зрозуміло, що легко змінити колір усіх клітинок у прямокутнику 2×3. Тепер покажемо, що можна змінити колір усіх клітинок у квадраті 3×3. Для наочності будемо вважати, що спочатку в кожній клітинці стоїть 0, а коли перефарбовуються чергові три клітинки, числа у цих клітинках збільшуються на 1:



Ми дістали дошку, заповнену лише непарними числами, тобто всі клітинки змінили колір на чорний.

Тепер ми можемо розрізати дошку 9×5 на три квадрати 3×3 і на три прямокутники 2×3, а потім перефарбувати кожну з цих частин дошки у протилежний колір.



8. Оленка стверджує, що число 44 ... 48 ... 89, у десятковому записі якого використано 2026 четвірок, 2025 вісімок та одну дев’ятку, є точним квадратом натурального числа. Чи не помиляється вона?

Відповідь: ні, не помиляється.

Розв'язання. Позначимо дане число N. Тоді

$$\mathrm{N} = \underbrace{44\ldots4}_{2026}\cdot 10^{2026} + \underbrace{88\ldots8}_{2025}\cdot 10 + 9.$$

Оскільки $\underbrace{44\ldots4}_{2026} = \frac{4}{9}\cdot(10^{2026} - 1)$ та $\underbrace{88\ldots8}_{2025} = \frac{8}{9}\cdot(10^{2025} - 1)$, то

$$N = \frac{4}{9}\cdot(10^{2026} - 1)\cdot 10^{2026} + \frac{8}{9}\cdot(10^{2025} - 1)\cdot 10 + 9 =$$

$$= \frac{4\cdot10^{4052}+4\cdot10^{2026}+1}{9} = \left(\frac{2\cdot10^{2026}+1}{3}\right)^2.$$

Число $\frac{2\cdot10^{2026}+1}{3}$ натуральне, оскільки число $2\cdot10^{2026}+1$ має суму цифр 3, а тому ділиться на 3. Отже, Оленка не помиляється.

3 тур

9. Святослав і Мирослав грають у гру, першим ходить Мирослав. Вони по черзі обирають цілі числа від 1 до 100, які ще ніхто раніше не обирав. Гравець програє, якщо після його ходу суму всіх чисел, обраних з початку гри обома гравцями, не можна записати як різницю квадратів двох цілих чисел. Чи має один із гравців виграшну стратегію? Якщо так, то хто?

Відповідь: виграшну стратегію має Мирослав.

Розв'язання. Спочатку з'ясуємо, коли завершується гра.

Розглянемо різницю квадратів двох цілих чисел: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Якщо a і b — числа однієї парності, то обидві дужки є парними, отже $a^2 - b^2$ ділиться на 4. І навпаки, кожне ціле число, кратне 4, можна подати як різницю квадратів двох цілих чисел, оскільки $(k+1)^2 - (k-1)^2 = 4k,$ де k ціле.

Якщо a і b — числа різної парності, то обидві дужки є непарними, тому $a^2 - b^2$ непарне. І навпаки, кожне непарне число також можна подати як різницю квадратів двох цілих чисел, бо $(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$, де m ціле.

Отже, гра триває, поки сума всіх обраних чисел ділиться на 4 або дає остачі 1, 3 при діленні на 4, а коли сума вперше дасть остачу 2, гравець, на чиєму ході це сталося, програє.

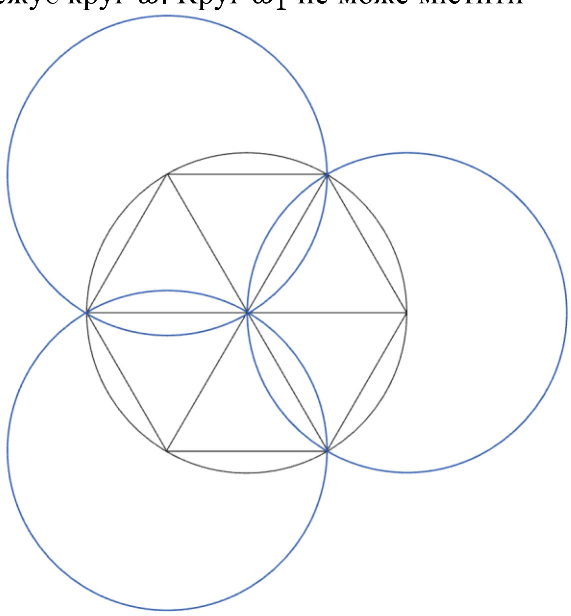
Покажемо, що Мирослав може забезпечити собі перемогу. Першим своїм ходом він може обрати число 100, а далі, якщо Святослав обрав число a і не програв, Мирослав у відповідь обирає число $100 - a$ і не програє, бо сума чисел після його ходу ділиться на 4. Єдине число Святослава, яке Мирослав не може доповнити до 100, це 50. Але, якщо Святослав обирає число 50, він одразу програє, бо утворюється сума, яка дає остачу 2 при діленні на 4. Рано чи пізно Святослав буде вимушений назвати число, яке дає остачу 2 при діленні на 4, і програє.

10. Яка найменша кількість кругів радіуса 1 потрібна, аби повністю накрити інший круг радіуса 1, якщо жодні два круга не мають збігатися?

Відповідь: 3.

Розв'язання. Покажемо, що двох кругів не вистачить. Припустимо, що круги ω_1 та ω_2 радіуса 1 покривають круг ω радіуса 1. Розглянемо коло γ, яке обмежує круг ω. Круг ω_1 не може містити пару діаметрально протилежних точок кола γ, інакше кола ω_1 та ω збігалися би. Тому круг ω_1 може накрити дугу кола γ, меншу за півколо. Круг ω_2 також може накрити дугу кола γ, меншу за півколо, а два круги разом накривають не все коло γ, а тому і не весь круг ω.

Тепер покажемо, що трьох кругів достатньо. Впишемо у круг ω правильний шестикутник. Центри трьох кругів розмістимо у вершинах цього шестикутника через одну як показано на рисунку. Три такі круги повністю накривають ω.



Отже, найменша потрібна кількість кругів дорівнює 3.

Пам'яті видатного вчителя геометрії І. А. Кушніра

XXIX олімпіада з математики Русанівського ліцею

18 квітня 2026

8 клас

1. На дошці записані числа від 1 до 2027. Поліна і Дарина по черзі стирають по одному числу, починає Поліна. Гра закінчується, коли на дошці залишаються два числа. Якщо їхня сума ділиться на 3, то перемагає Поліна, а якщо ні, то Дарина. Хто з гравців має виграшну стратегію? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: виграє Поліна.

Розв'язання.
І спосіб. Наведемо одну з можливих стратегій Поліни. Першим ходом вона стирає число 1014. Усі інші числа можна розбити на пари так, аби сума чисел у кожній парі дорівнювала 2028: (1, 2027), (2, 2026), (3, 2025) тощо. Кожен раз, коли Дарина стирає деяке число, Поліна у відповідь стиратиме друге число з тієї ж пари. Таким чином, у кінці гри залишиться пара чисел із сумою 2028, а 2028 ділиться на 3.

ІІ спосіб. Оскільки нас цікавить лише подільність на 3, всі числа можна замінити остачами від ділення на 3. Спочатку на дошці 675 нулів, 676 одиниць та 676 двійок. Першим ходом Поліна стирає 0, а далі якщо Дарина стирає 1, 2 або 0, то Поліна у відповідь стирає 2, 1 або 0 відповідно. Вона завжди може це робити, бо після її ходів на дошці буде парна кількість нулів і однакова кількість одиниць та двійок. У кінці гри на дошці будуть одиниця і двійка або два нуля, тому Поліна виграє.

2. (Олександр Кожем'яка) Про додатні числа a, b, c відомо, що одне з чисел $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ та $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ є раціональним, а інше — ірраціональним. Доведіть, що хоча б одне з чисел $\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}$, $\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}$ та $\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}$ є ірраціональним.

Розв'язання. Припустимо, що всі числа $\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}$, $\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}$, $\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}$ є раціональними. Тоді сума квадратів цих чисел теж є раціональною. Маємо

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2=\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}-2+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}-2+\frac{a}{c}\right)=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)-6.$$

Але з умови задачі випливає, що число $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)-6$ є ірраціональним, суперечність. Отже, хоча б одне з чисел $\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}$, $\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}$ та $\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}$ є ірраціональним.

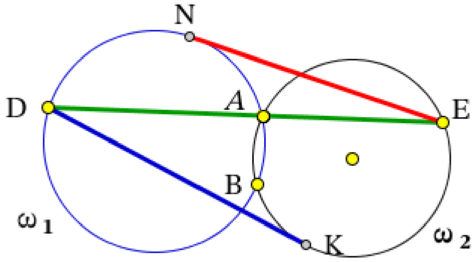
3. (Михайло Плотніков) Кола ω_1 і ω_2 перетинаються в точках A і B. Через A проведена довільна січна DE ($D \in \omega_1$, $E \in \omega_2$). DK і EN — відповідно дотичні до кіл ω_2 і ω_1. Доведіть, що з відрізків DK, EN і DE можна скласти прямокутний трикутник.

Доведення:

За теоремою про квадрат дотичної для кола ω_1: $EN^2 = ED \cdot EA$ (1)

а для ω_2: $DK^2 = DE \cdot DA$ (2),

Додавши (1) і (2), отримаємо: $EN^2 + DK^2 = DE(DA+EA) = DE^2$, тоді за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, з відрізків DK, EN і DE можна скласти прямокутний трикутник.



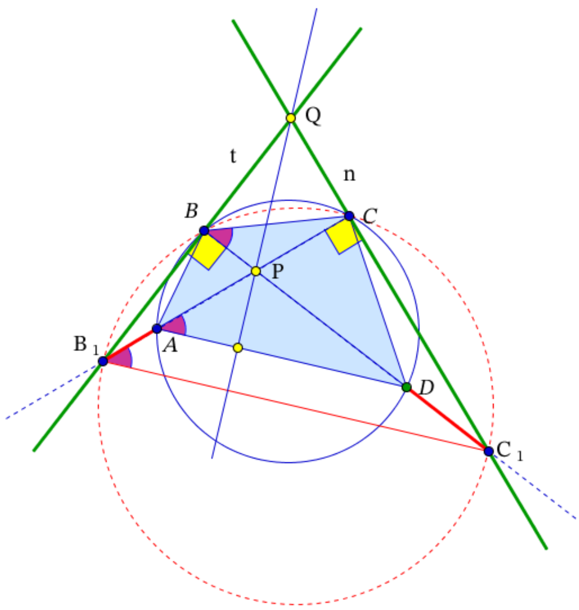
4. (Михайло Сидоренко) Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник. Через точку B провели пряму t, перпендикулярну до BD, а через точку C — пряму n, перпендикулярну до AC. Діагоналі чотирикутника перетинаються в точці P, а прямі t і n — у точці Q. Доведіть, що PQ перпендикулярно AD.

Доведення:

Нехай BQ перетинає AC в точці B_1, а CQ перетинає BD в точці C_1

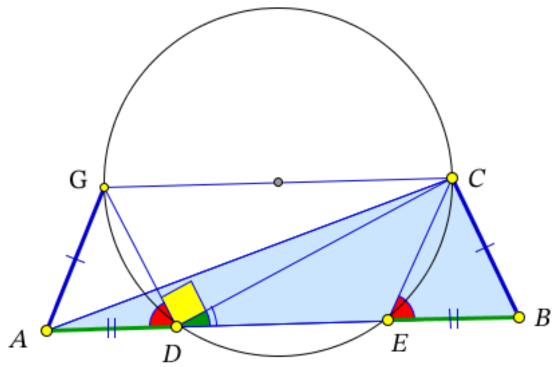
Розглянемо чотирикутник BB_1C_1C.
Оскільки $\angle B_1BC_1 = \angle B_1CC_1 = 90°$ за побудовою, то чотирикутник BB_1C_1C вписаний та $\angle CBC_1 = \angle CB_1C_1$.
Але також $\angle CBC_1 = \angle CAD$ — як вписані кути, що спираються на одну дугу. Оскільки звідси $\angle CB_1C_1 = \angle CAD$, то прямі B_1C_1 і AD паралельні.

У трикутнику QB_1C_1 точка P — ортоцентр, звідси випливає, що прямі QP та B_1C_1 перпендикулярні, а отже і перпендикулярні QP та AD. Оскільки P — це точка перетину AC і BD, а QP – перпендикуляр до AD, то отримали те, що потрібно.



5. (Володимир Брайман) Дано трикутник ABC, в якому $AC > BC$. Побудувати на стороні AB такі точки D, E, що $AD = BE$ та $\angle BDC + \angle BEC = 90°$.

Розв'язання. Добудуємо трикутник до рівнобічної трапеції $ABCG$ з основами AB та CG. Трикутники ADG та BEC рівні за двома сторонами і кутом між ними, тому $\angle ADG = \angle BEC$, тобто $\angle ADG + \angle BDC = 90°$. Отже, $\angle GDC = 90°$, тобто D, E — точки перетину кола з діаметром CG зі стороною AB. Задача має розв'язок за умови, що коло з діаметром CG перетинає сторону AB у двох точках.



6. Назвемо десятицифрове число **цікавим**, якщо воно ділиться на число 11111 і всі його цифри різні. Скільки існує цікавих чисел?

Відповідь: 3456.

Розв'язання. Якщо всі цифри десятицифрового числа різні, то їхня сума дорівнює 45. Тому це число ділиться на 9. Отже, якщо воно ділиться на 11111, то воно ділиться і на 99999.

Розглянемо десятицифрове число $X=\overline{a_9 \dots a_0}$ і зауважимо, що

$$X=10^5 \cdot \overline{a_9 \dots a_5}+\overline{a_4 \dots a_0} = 99999 \cdot \overline{a_9 \dots a_5}+\overline{a_9 \dots a_5}+\overline{a_4 \dots a_0}.$$

Таким чином, число X ділиться на 99999 тоді і тільки тоді, коли сума $\overline{a_9 \dots a_5}+\overline{a_4 \dots a_0}$ ділиться на 99999. Але ця сума менша за $2 \cdot 99999$. Тому вона ділиться на 99999 лише за умови, що вона дорівнює 99999. Це рівносильно тому, що $a_0+a_5=9,\ a_1+a_6=9,\ a_2+a_7=9,\ a_3+a_8=9$ та $a_4+a_9=9$.

Отже, останні п'ять цифр цікавого числа визначаються його першими п'ятьма цифрами, а перші п'ять цифр можна вибирати довільно так, аби жодні дві з них не давали в сумі 9 і щоб a_9 не дорівнювало нулю. Таким чином, цифру a_9 можна вибрати 9 способами, цифру a_8 — 8 способами (не можна обирати a_9 і $9-a_9$), a_7 — 6 способами, a_6 — 4 способами та a_5 — 2 способами. Звідси отримуємо $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2=3456$ можливостей.

Пам'яті видатного вчителя геометрії І.А. Кушніра

XXIX олімпіада з математики Русанівського ліцею м. Києва (2026)

Командна олімпіада, 9–10 класи.

Розв'язання задач

1. (*Матвій Курський*) Нехай ABC — рівнобедрений трикутник ($AB = BC$). На сторонах AC та BC відмітили точки D та E відповідно так, що $AD = DE = EC$. Доведіть, що центр зовнівписаного кола трикутника CDE, яке дотикається до сторони DE, лежить на відрізку AB.

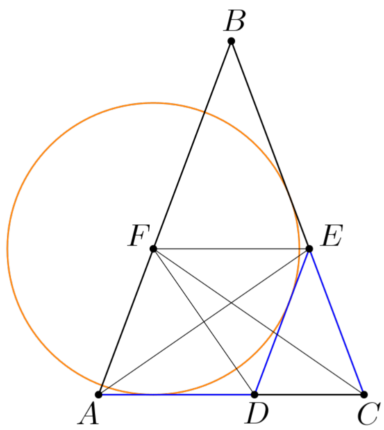


Рис. 1.

Розв'язання. Оскільки трикутники ABC та DEC рівнобедрені з однаковим кутом при основі, то $DE \parallel AB$. Відмітимо на стороні AB точку F так, що $EF \parallel AC$ (рис. 1). Тоді $ADEF$ — ромб, отже DF є бісектрисою кута ADE, AE є бісектрисою кута BAC, а з міркувань симетрії CF є бісектрисою кута ACB. Таким чином, F є центром зовнівписаного кола трикутника CDE.

2. На нескінченній шахівниці стоять коні та слони, усього N фігур. Відомо, що кожен слон б'є хоча б одного коня, а кожен кінь б'є хоча б одного слона, проте це твердження стане хибним, якщо зняти з дошки будь-яку одну фігуру (вважаємо, що слон б'є коня навіть якщо на діагоналі між ними є інші фігури). Знайдіть всі можливі значення N.

Розв'язання. На рис. 2 зображено розташування двох коней та двох слонів, яке задовольняє умову. Якщо розташувати на шахівниці $k \geq 1$ таких четвірок фігур достатньо далеко, аби фігури з різних четвірок не били одна одну, дістанемо приклад з $N = 4k$. Залишається показати, що немає інших можливих значень N.

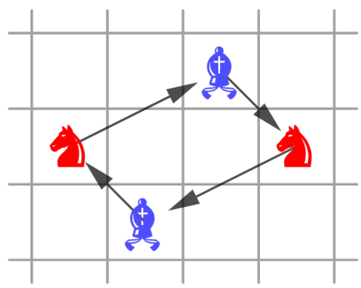


Рис. 2.

Проведемо стрілку від кожної фігури до фігури, яку вона б'є, за умови, що така фігура рівно одна. За умовою до кожної фігури веде стрілка, бо інакше цю фігуру можна було б зняти з дошки. Отже, кількість стрілок не менша за кількість фігур, а тому від кожної фігури веде стрілка. Рухаючись вздовж стрілок, дістанемо, що всі фігури утворюють один або декілька циклів, в яких коні та слони чергуються. Якщо шахівницю розфарбовано стандартним чином, при переході від коня до слона колір клітинки змінюється, а при переході від слона до коня зберігається. Отже, кольори клітинок з конями у циклі чергуються, а тому кожен цикл містить парну кількість коней. Таким чином, кількість фігур у кожному циклі ділиться на 4, а тому і загальна кількість фігур ділиться на 4.

Відповідь: $N = 4k$, $k \geq 1$.

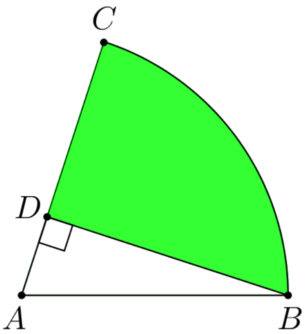
3. (*Олександр Толесніков*) На дошці записано 100 додатних чисел. Відомо, що сума будь-яких 50 з них менша за добуток решти 50 чисел. Чи правда, що сума всіх чисел на дошці принаймні у 25 разів менша за добуток усіх чисел на дошці?

Розв'язання. Нехай на дошці записані числа $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{100}$. Оберемо число m так, що $a_{50} \leq m \leq a_{51}$. Тоді

$$50m \leq a_{51} + \ldots + a_{100} < a_1 \cdot \ldots \cdot a_{50} \leq m^{50},$$

тому $m^{49} > 50$, зокрема $m > 1$. Звідси випливає, що

$$25(a_1 + \ldots + a_{100}) \leq 50\,(a_{51} + \ldots + a_{100}) <$$
$$< a_1 \cdot \ldots \cdot a_{50} \cdot m^{50} \leq a_1 \cdot \ldots \cdot a_{100}.$$



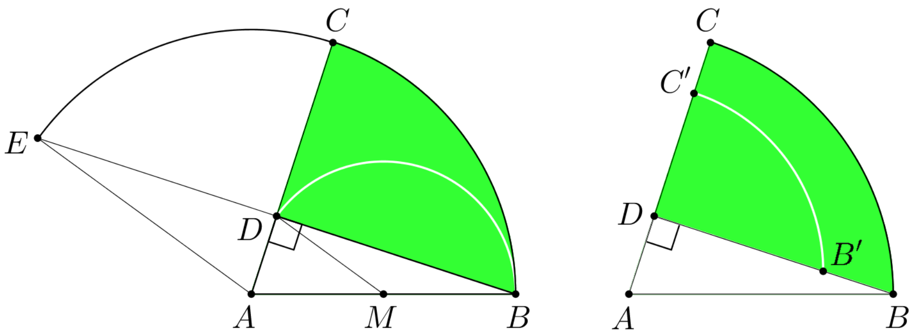
4. (*Сергій Яковлєв*) На рисунку зображено крокетний майданчик BCD. За допомогою циркуля та лінійки

а) проведіть дугу деякого кола, яка ділить площу майданчика навпіл;

б) проведіть дугу іншого кола, яка також ділить площу майданчика навпіл.

Розв'язання. I спосіб. Нехай точка E симетрична до B відносно AC (рис. 3 а). Площа майданчика удвічі менша за площу сегмента, обмеженого дугою BCE та відрізком BE. При гомотетії з центром B і коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ цей сегмент перейде у сегмент, обмежений дугою BD та відрізком BD. Площа цього сегмента дорівнює чверті площі великого сегмента, тобто половині площі майданчика. Таким чином, достатньо відмітити точку M, яка є серединою AB, і провести дугу BD кола з центром M і радіусом MB.

II спосіб. Достатньо провести дугу $B'C'$, яка є образом дуги BC при гомотетії з центром D і коефіцієнтом $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (рис. 3 б).



а) б)

Рис. 3.

5. (*Олександр Толесніков*) Є шість зовні однакових монет, серед яких три справжні монети вагою 10 г, дві фальшиві легкі монети вагою 9 г та одна фальшива важка монета вагою 11 г. На хлипких терезах за одне зважування можна порівняти вагу лише двох монет. За яку найменшу кількість зважувань можна визначити вагу всіх монет?

Розв'язання. Обрати серед 6 монет одну на роль важкої та дві на роль легких можна $6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 60$ способами. При будь-якому зважуванні існує результат, при якому залишається не менше третини можливих варіантів, тому за три зважування не завжди можна залишити єдиний варіант. Покажемо, що чотирьох зважувань достатньо.

Розіб'ємо монети на три пари і першими трьома зважуваннями порівняємо вагу монет у кожній парі. В залежності від результатів цих зважувань можливі такі випадки:

1) В усіх зважуваннях одна монета виявилася легшою за іншу. Тоді у двох парах монети легка і справжня, а у третій справжня і важка. Порівняємо важчі монети з двох пар і за результатом знайдемо пару зі справжньою і важкою монетами.

2) У двох зважуваннях одна монета виявилася легшою за іншу, а у третьому зважуванні була рівновага. Тоді у двох парах легка і справжня та легка і важка монети, а у третій дві справжні. Порівняємо важчі монети з двох пар, у яких не було рівноваги, і дізнаємося, яка з них справжня і яка важка.

3) У одному зважуванні одна монета виявилася легшою за іншу, а у двох зважуваннях була рівновага. Тоді у першій парі справжня та важка монети, а у парах з рівновагою дві легкі та дві справжні. Порівняємо по одній монеті з двох пар, в яких була рівновага, і дізнаємося, в якій парі монети справжні, а в якій легкі.

4) Рівноваги в усіх зважуваннях бути не може.

6. (*Вадим Соломка*) Про опуклий п'ятикутник $ABCDE$ відомо, що $BD \parallel AE$ та $\angle ABC = \angle EDC$. На продовженні CB за точку B відмітили точку K так, що $\angle BAK = \angle BDC$, а на продовженні CD за точку D відмітили точку L так, що $\angle DEL = \angle DBC$. Доведіть, що точки A, E, K, L лежать на одному колі.

Розв'язання. I спосіб. Позначимо $\angle ABK = \angle EDL = \alpha$ (ці кути рівні як суміжні з рівними кутами $\angle ABC$ та $\angle EDC$), $\angle ABD = \beta$ та $\angle BDE = \gamma$ (рис. 4). Тоді $\angle BAK = \angle BDC = 180^\circ - \alpha - \gamma$, а тому з трикутника ABK знаходимо $\angle AKB = \gamma$. Аналогічно $\angle DEL = \angle DBC = 180^\circ - \alpha - \beta$, а тому з трикутника EDL знаходимо $\angle ELD = \beta$. Також маємо

$$\angle KAE = \angle KAB + \angle BAE = (180^\circ - \alpha - \gamma) + (180^\circ - \beta),$$
$$\angle LEA = \angle LED + \angle DEA = (180^\circ - \alpha - \beta) + (180^\circ - \gamma),$$

тобто $\angle KAE = \angle LEA$. Покажемо, що також $AK = EL$. Звідси випливатиме, що $AKLE$ — рівнобічна трапеція або прямокутник, а отже точки A, E, K, L лежать на одному колі.

Оскільки $BD \parallel AE$, точки A та E знаходяться на однаковій відстані h від BD. Тому $AB \sin\beta = ED \sin\gamma = h$. За теоремою синусів

$$AK = AB \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = h \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta \sin\gamma}, \qquad EL = ED \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = h \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta \sin\gamma},$$

тобто $AK = EL$, що завершує доведення.

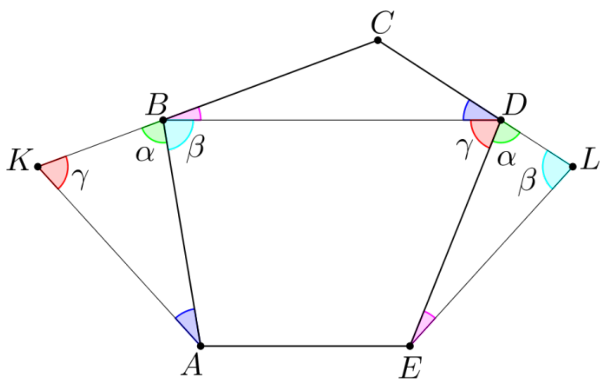


Рис. 4.

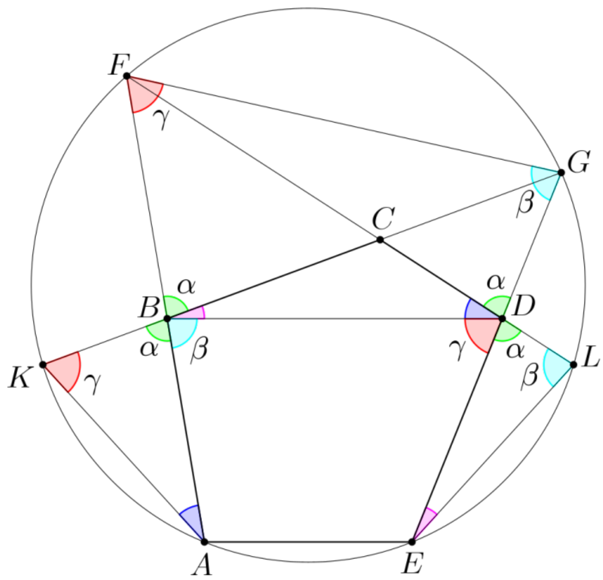


Рис. 5.

II спосіб. Нехай прямі AB та CD перетинаються у точці F, а прямі BC та DE перетинаються у точці G (рис. 5). Як і в I способі, позначимо $\angle ABK = \angle EDL = \alpha$, $\angle ABD = \beta$ та $\angle BDE = \gamma$. Тоді $\angle FBG = \angle FDG = \alpha$, тому чотирикутник $BFGD$ вписаний. Звідси $\angle BFG = \angle BDE = \gamma$ та $\angle DGF = \angle ABD = \beta$. Оскільки $BD \parallel AE$, то $\angle AEG = \angle BDG = 180^\circ - \gamma$, тому чотирикутник $AFGE$ теж вписаний. Але у I способі було встановлено, що $\angle AKG = \angle AFG = \gamma$ та $\angle ELF = \angle EGF = \beta$. Тому точки K та L лежать на описаному колі чотирикутника $AFGE$, тобто усі шість точок A, E, F, G, K, L лежать на одному колі.

7. (*Михайло Сидоренко*) Нехай ABC — гострокутний трикутник, у якому $AB < AC$. На стороні AC обрали точку D так, що $AD = AB$, а на стороні BC

точку T так, що $DT \perp AC$. Нехай ω — описане коло трикутника ABC, AS — діаметр кола ω, а W — середина дуги $\smile BSC$. Доведіть, що точка перетину прямих SD та WT лежить на колі ω.

Розв'язання. Нехай пряма WT перетинає ω у точці E, а пряма ED перетинає ω у точці S' (рис. 6). Доведемо, що $S' = S$.

Трикутники ABW та ADW рівні за двома сторонами і кутом між ними, тому $WD = WB = WC$. Трикутники WEC та WCT подібні (кут при вершині W спільний, $\angle WEC = \angle WCT = \frac{1}{2}\angle BAC$), отже $WC/WT = WE/WC$. Але $WD = WC$, тому $WD/WT = WE/WD$, тобто трикутники WED та WDT теж подібні. Отже,

$$\angle TDW = \angle WED = \angle WES' = \angle WCS'.$$

Оскільки трикутник WDC рівнобедрений, то $\angle WDC = \angle WCD$. Таким чином,

$$\angle TDC = \angle TDW + \angle WDC = \angle WCS' + \angle WCD = \angle DCS'.$$

Отже, $\angle DCS' = \angle TDC = 90°$. Тому AS' — діаметр, що завершує доведення.

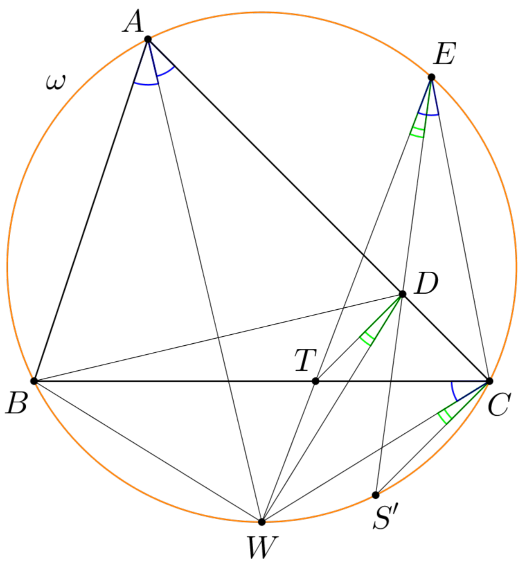


Рис. 6.

8. Про функцію $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ відомо, що при будь-яких натуральних a, b, c, d правильна рівність

$$F\big(F(F(a))\big)\, F\big(bcF(d\,F(a))\big) = a^2\, F\big(bF(d)\big)\, F(c).$$

Доведіть, що $F(n!) \geq n!$ при всіх натуральних n (тут $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $n \geq 1$).

Розв'язання. При $b = c = d = 1$ маємо $F\big(F(F(a))\big)\, F\big(F(F(a))\big) = a^2\, F\big(F(1)\big)\, F(1)$, тому з рівності $F(a_1) = F(a_2)$ випливає, що $a_1 = a_2$. Отже, в різних точках F набуває різні значення.

Підставимо у початкове рівняння $a = 1$ та $c = F(F(1))$. Дістанемо

$$F\big(F(F(1))\big)\, F\big(b\, F(F(1))\, F(d\, F(1))\big) = F\big(bF(d)\big)\, F\big(F(F(1))\big),$$

або $F\big(b\, F(F(1))\, F(d\, F(1))\big) = F\big(bF(d)\big)$. Звідси $b\, F(F(1))\, F(d\, F(1)) = bF(d)$, або $F(F(1))\, F(d\, F(1)) = F(d)$.

Покладемо $t = F(1)$. Тоді $F(t)\, F(dt) = F(d)$ при всіх $d \in \mathbb{N}$. Звідси дістаємо, що $F(t)\, F(t^2) = F(t)$, тобто $F(t^2) = 1$, та $F(t)\, F(t^3) = F(t^2) = 1$, тобто $F(t) = 1$. Але тоді $F(t^2) = F(t)$, отже $t^2 = t$ та $f(1) = t = 1$.

Тепер з початкового рівняння при $a = d = 1$ дістаємо, що $F(bc) = F(b)F(c)$ при всіх $b, c \in \mathbb{N}$. Нарешті, $F(n!) = F(1)F(2)\ldots F(n)$ є добутком n різних натуральних чисел, а тому не менше за $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$

9. (*Михайло Плотніков*) На стороні BC трикутника ABC обирають точки X та Y такі, що $AX+BX=AY+CY$. Доведіть, що при всіх можливих положеннях точок X та Y інцентр трикутника AXY лежить на одній з двох прямих.

Розв'язання. Нехай M — середина BC. Тоді очевидно, що $AM+BM=AM+CM$. Розглянемо, як можуть бути розташовані точки X та Y відносно точки M. Якщо $BX<BM$, то за нерівністю трикутника $AM+BM=AM+BX+XM>AX+BX$. Якщо ж $BX>BM$, то $AX+BX=AX+BM+MX>AM+BM$. Аналогічно дістаємо, що якщо $CY<CM$, то $AM+CM>AY+CY$, а якщо $CY>CM$, то $AY+CY>AM+CM$. Звідси випливає, що або одночасно $BX<BM$ та $CY<CM$ (рис. 7 а), або одночасно $BX>BM$ та $CY>CM$ (рис. 7 б). Покажемо, що у кожному з цих випадків інцентри всіх можливих трикутників AXY лежить на одній прямій (своїй для кожного випадку).

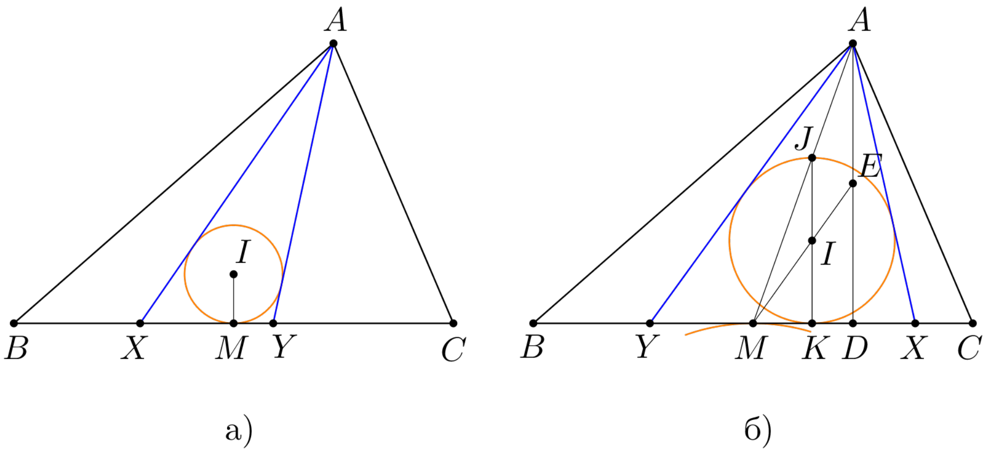


Рис. 7.

Нехай $BX<BM$ та $CY<CM$. Перепишемо рівність з умови у вигляді

$$AX+BX-BM=AY+CY-CM,$$

тобто $AX-XM=AY-YM$. Це означає, що M — точка дотику вписаного кола трикутника AXY зі стороною XY, а тому інцентр трикутника AXY завжди лежить на серединному перпендикулярі до BC.

Нехай $BX>BM$ та $CY>CM$. Тепер рівність

$$AX+BX-BM=AY+CY-CM$$

набуває вигляду $AX+XM=AY+YM$. Це означає, що M — точка дотику зовнівписаного кола трикутника AXY зі стороною XY. Нехай E — середина висоти AD трикутника ABC. Покажемо, що інцентр трикутника AXY завжди лежить на прямій ME. Нехай K — точка дотику вписаного кола трикутника AXY зі стороною XY, а JK — діаметр цього кола. При гомотетії з центром A, яка переводить зовнівписане коло у вписане, точка M переходить у точку J, тому $A-J-M$ це одна пряма. Нарешті, при гомотетії з центром M, яка переводить JK у AD, точка I переходить у точку E.

10. Деякі 2^n+1 різних натуральних чисел, де $n\geq 1$, пофарбували у зелений колір. Для кожної пари зелених чисел $a\neq b$ записали всі прості дільники суми $a+b$. Доведіть, що серед усіх записаних простих дільників обов'язково знайдеться хоча б $n+1$ різних.

Розв'язання. Нехай $P=\{p_1<p_2<\ldots<p_k\}$ — множина всіх записаних простих чисел. Покажемо, що $k\geq n+1$.

Оскільки $2^n+1\geq 3$, серед зелених чисел є числа однакової парності, їхня сума ділиться на 2. Тому $p_1=2$.

Будемо казати, що $\nu_p(c)=t\geq 0$, якщо c ділиться на p^t та не ділиться на p^{t+1}. Назвемо зелені числа $a<b$ друзями за простим модулем p, якщо $\nu_p(a+b)\geq\nu_p(a)+1$

у випадку непарного p та якщо $\nu_2(a+b) \geq \nu_2(a)+2$ у випадку $p = 2$. Оскільки $a+b > 2a$ та всі дільники числа $a + b$ належать множині P, то кожні два зелені числа $a < b$ є друзями за хоча б одним із модулів $p_1, \ldots, p_k$.

Запитаємо у кожного зеленого числа c, якою є остача від ділення $\frac{c}{2^{\nu_2(c)}}$ на 4, а також парною чи непарною є остача від ділення $\frac{c}{p^{\nu_p(c)}}$ на p при $p = p_2, \ldots, p = p_k$. Якщо числа $a < b$ є друзями за непарним модулем p, то $\nu_p(a) = \nu_p(b) = t$ при деякому $t \geq 0$, а сума остач від ділення $\frac{a}{p^t}$ та $\frac{b}{p^t}$ на p дорівнює p, тобто ці остачі мають різну парність. Аналогічно якщо числа $a < b$ є друзями за модулем 2, то $\nu_2(a) = \nu_2(b) = t$ при деякому $t \geq 0$, а сума остач від ділення $\frac{a}{2^t}$ та $\frac{b}{2^t}$ на 4 дорівнює 4, тобто ці остачі дорівнюють 1 та 3. Оскільки кожні зелені числа $a < b$ є друзями за хоча б одним з модулів $p_1, \ldots, p_k$, будь-які два зелені числа відповіли по-різному хоча б на одне питання. Але при $k \leq n$ відповісти на k питань можна $2^k < 2^n + 1$ способами, тобто за принципом Діріхле деякі зелені числа мали відповісти на всі питання однаково, суперечність.