ГЕОМЕТРИЧНІ МІНІАТЮРИ

Властивість прямої, яка проходить через центроїд трикутника

Г. Філіпповський, Русанівський ліцей, м. Київ

Нехай через центроїд M — точку перетину медіан трикутника ABC — проведено довільну пряму l (*рис. 1*). Нехай також відстані від вершин A, B і C до l відповідно дорівнюють x, y, z. Тоді ***відстань від однієї вершини до прямої l дорівнює сумі відстаней до цієї прямої від двох інших вершин, що знаходяться по один бік від l.*** Або, згідно з рис. 1, $x = y + z$. Назвемо цю властивість *властивістю M* і доведемо її.

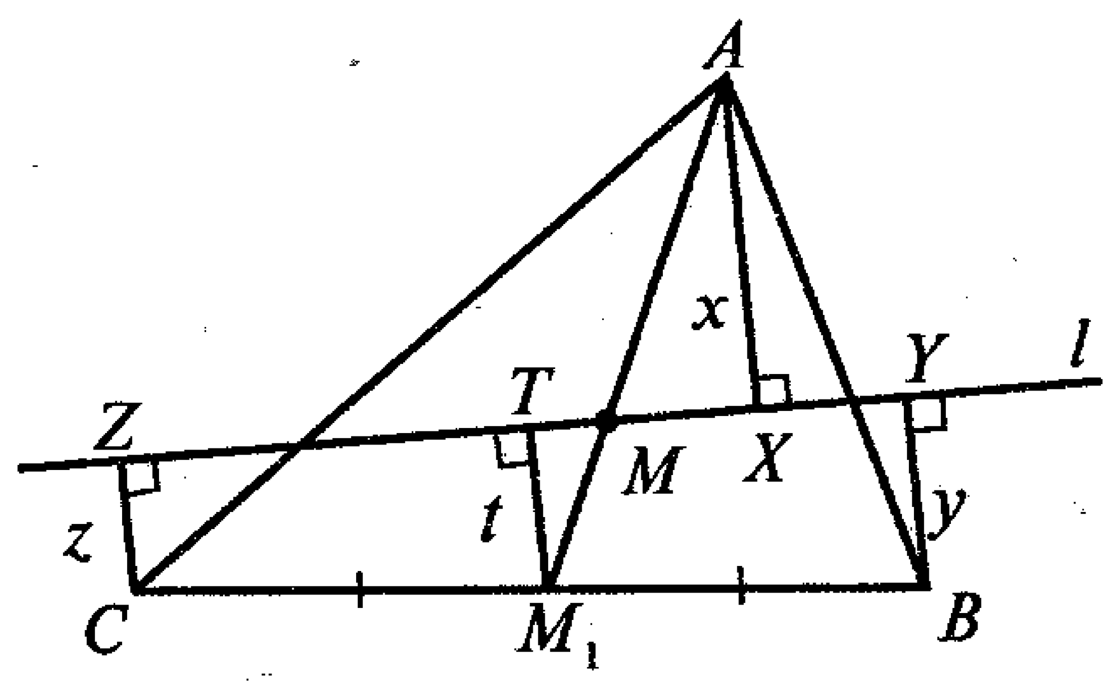

Рис. 1

Доведення. Проведемо медіану AM_1. З точки M_1 — перпендикуляр $M_1T = t$ до прямої l. Очевидно, що M_1T — середня лінія трапеції $BYZC$, тобто $t = \frac{y+z}{2}$.

Трикутники AMX і M_1MT подібні з коефіцієнтом подібності 2, оскільки $AM : MM_1 = 2:1$. Отже, $x = 2t = y + z$. *Властивість M* доведено!

Сама властивість є досить красивою та емоційною. До того ж, її широке застосування під час розв'язання задач демонструє важливість та корисність властивості M. Спробуємо підтвердити сказане.

Задача 1. Пряма l, що проходить через центроїд M трикутника ABC, відтинає на AB та AC відрізки k, n, e, f — як показано на *рис. 2*. Доведіть, що $\frac{e}{f} + \frac{k}{n} = 1$.

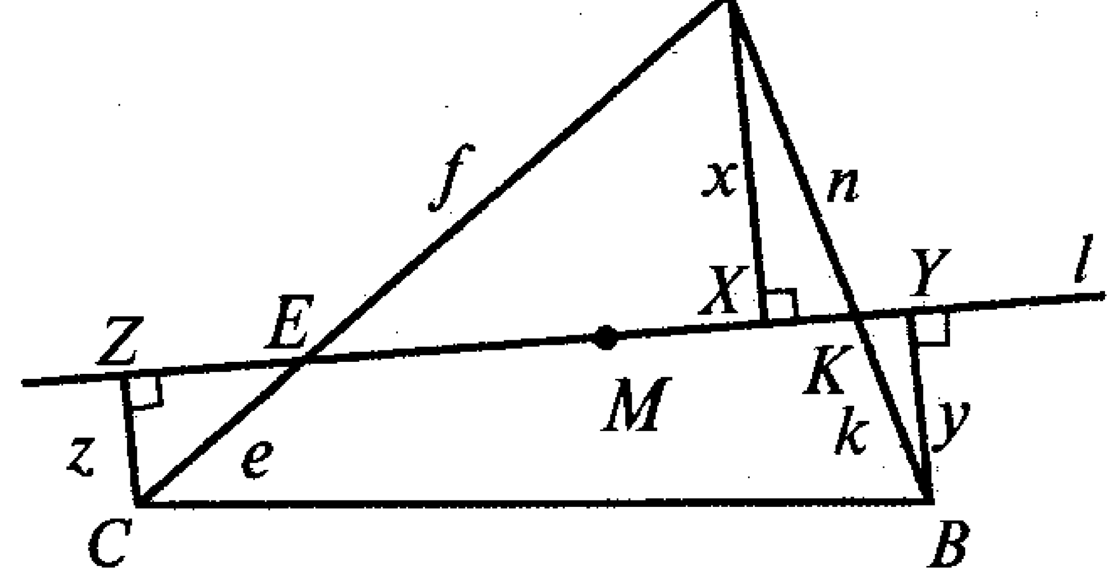

Рис. 2

Доведення. З вершин A, B і C проведемо перпендикуляри до прямої l:

$$AX = x; BY = y; CZ = z.$$

Оскільки $\Delta AXE \sim \Delta CZE$, то

$$\frac{e}{f} = \frac{z}{x}. \qquad (1)$$

Подібність трикутників AXK і BYK дає співвідношення:

$$\frac{k}{n} = \frac{y}{x}. \qquad (2)$$

Додавши ліві та праві частини рівностей (1) і (2), дістаємо: $\frac{e}{f} + \frac{k}{n} = \frac{z+y}{x}$.

Але за *властивістю M* $y + z = x$.

Отже, $\frac{e}{f} + \frac{k}{n} = 1$.

Задача 2. Через центроїд M трикутника ABC проведено довільну пряму l. Через вершини A, B, C проведено три довільні паралельні одна одній прямі, що утворюють при перетині з l відрізки u, v, w (*рис. 3*). Доведіть, що $u = v + w$.

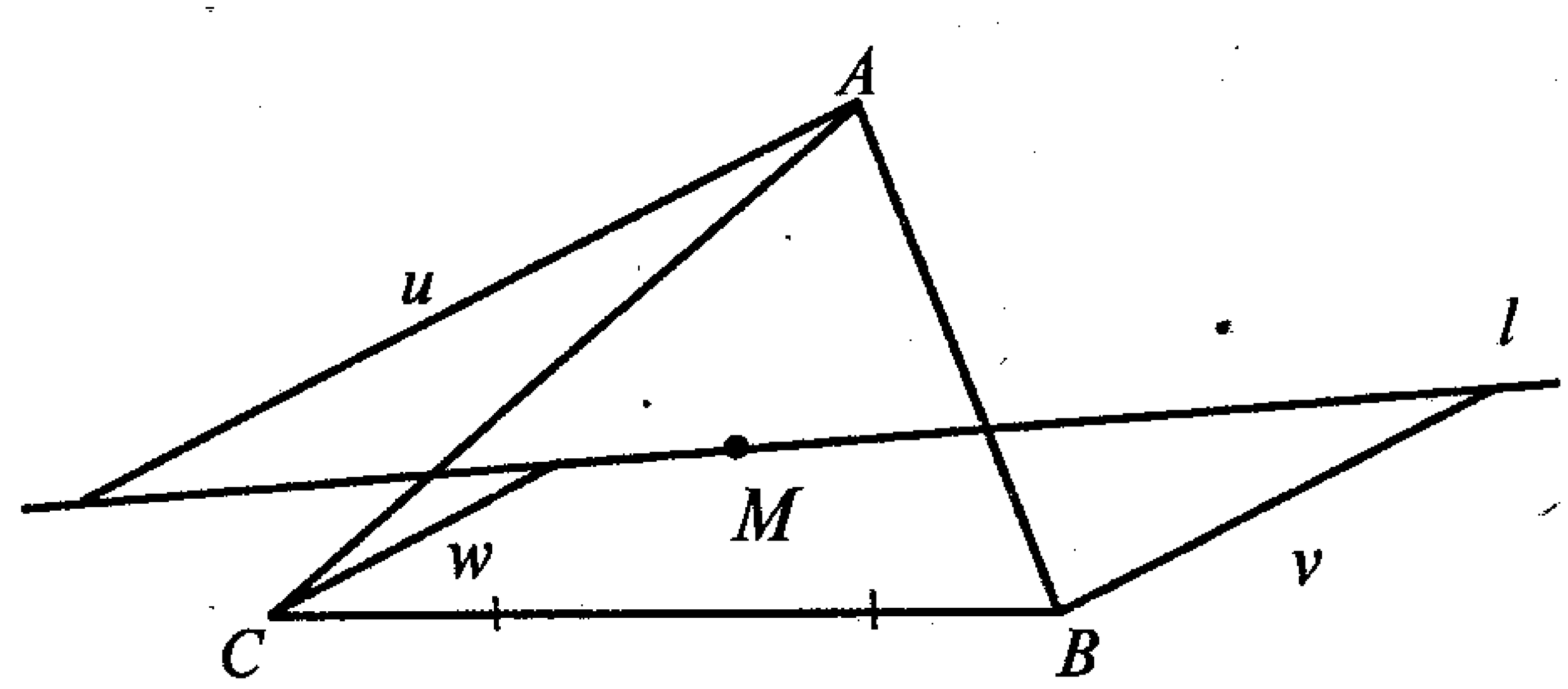

Рис. 3

Вказівка. Скористайтеся *властивістю M* та подібністю відповідних трикутників.

Задача 3. Зовні трикутника ABC проведено довільну пряму d. З вершин A, B, C і центроїда M до неї проведено перпендикуляри m, n, k і t відповідно (*рис. 4*). Доведіть, що $m + n + k = 3t$.

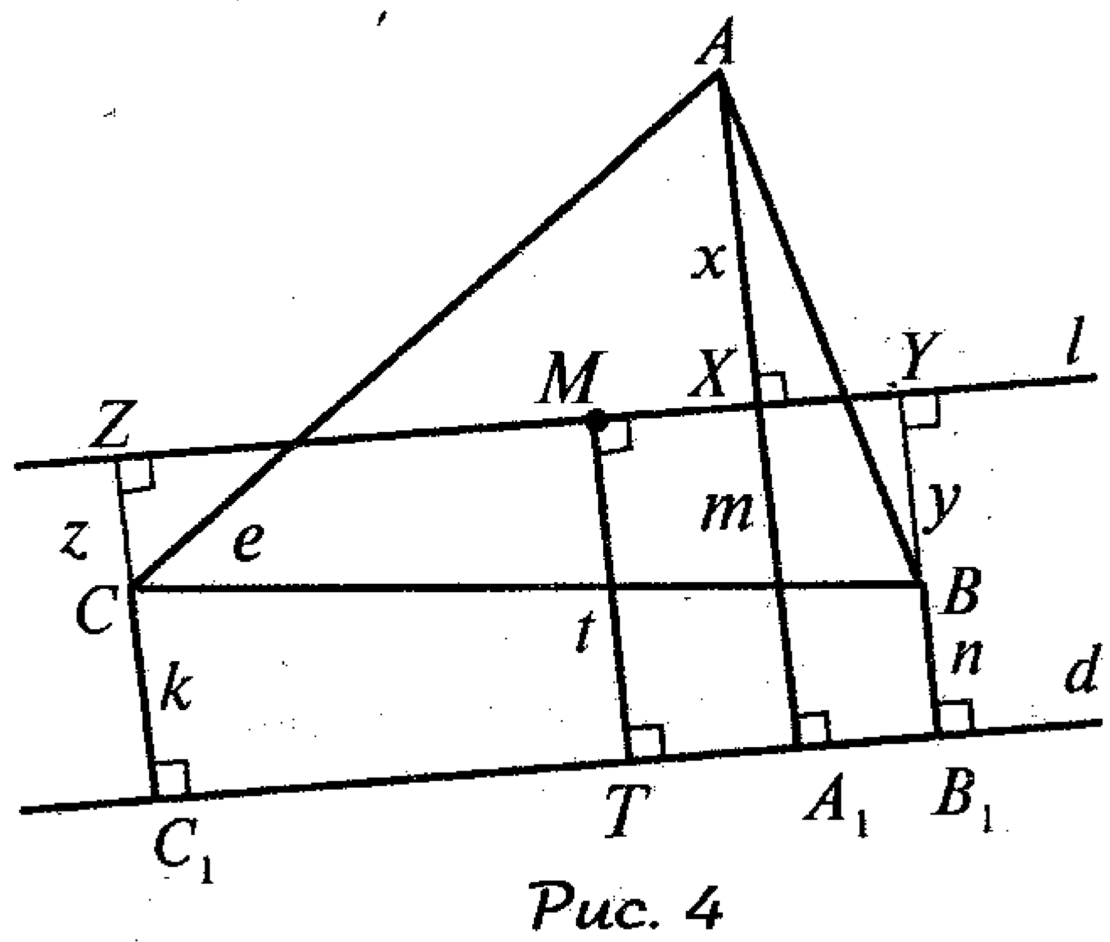

Рис. 4

Доведення. Нехай $AA_1 = m$; $BB_1 = n$; $CC_1 = k$ і $MT = t$. Через центроїд M проведемо пряму $l \| d$ і позначимо як звичайно: $AX = x$, $BY = y$, $CZ = z$.

Оскільки $XA_1 = YB_1 = ZC_1 = MT = t$, то маємо:

$$x = m - t \qquad (1)$$

$$y = t - n \qquad (2)$$

$$z = t - k \qquad (3)$$

За *властивістю M* $x = y + z$.

Отже, з (1), (2) і (3) дістаємо: $m - t = t - n + t - k$, звідки $m + n + k = 3t$.

Зауваження. Як зміниться формула задачі 3, якщо d буде знаходитися, наприклад, понад вершиною A?

Задача 4. Доведіть *формулу Лейбниця:* для будь-якої точки Q у площині трикутника ABC виконується рівність:

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3QM^2$$

(M — центроїд трикутника).

Доведення. Нехай Q — довільна точка в площині ΔABC (*рис. 5*). Проведемо пряму QM і через M перпендикулярно до неї — пряму l. Очевидно, що *властивість M* буде виконуватися: $AX = BY + CZ$, або $x = y + z$.

За теоремою косинусів для ΔQAM маємо:

$$QA^2 = QM^2 + MA^2 - 2QM \cdot MA \cdot \cos\alpha.$$

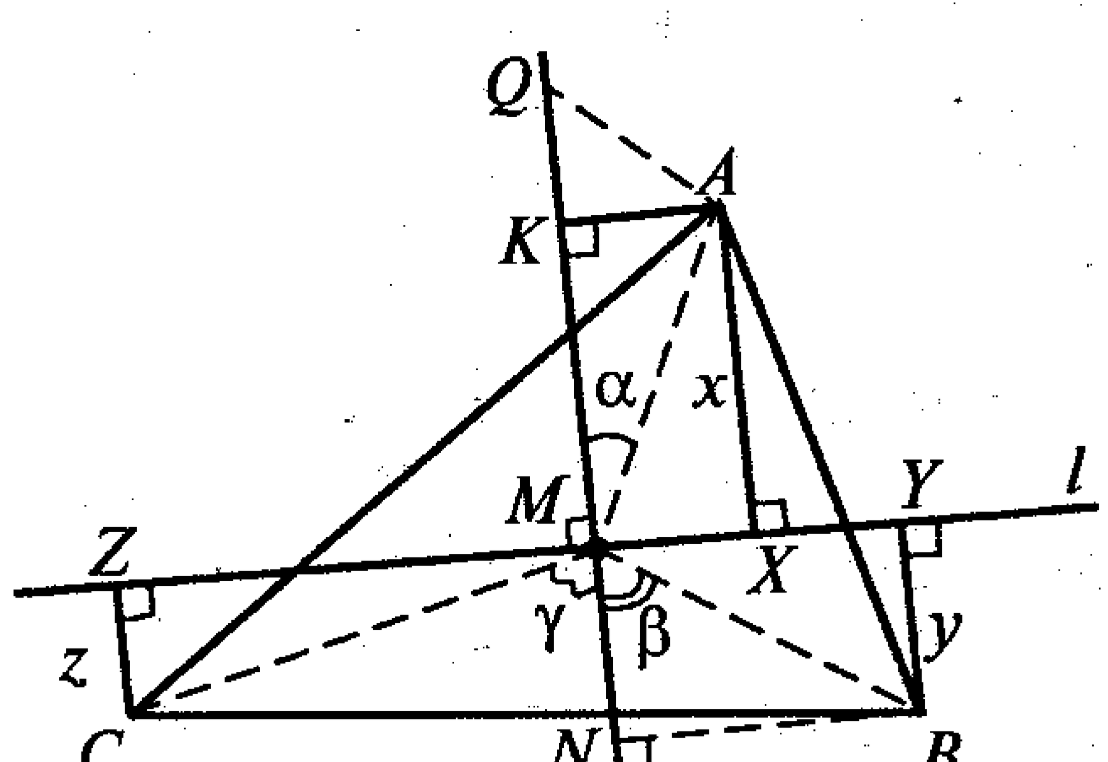

Рис. 5

Але $MA \cdot \cos\alpha = MK$.

У свою чергу, $MK = AX = x$. Отже,

$$QA^2 = QM^2 + MA^2 - 2QM \cdot x. \qquad (1)$$

Теорема косинусів для ΔQMB дає таку рівність:

$$QB^2 = QM^2 + MB^2 - 2QM \cdot MB \cdot \cos\left(180^\circ - \beta\right).$$

Враховуючи те, що $MB \cos\beta = MN = y$, дістаємо:

$$QB^2 = QM^2 + MB^2 + 2QM \cdot y. \qquad (2)$$

Аналогічно

$$QC^2 = QM^2 + MC^2 - 2QM \cdot MC \cdot \cos\left(180^\circ - \gamma\right).$$

Оскільки $MC \cdot \cos\gamma = z$, то

$$QC^2 = QM^2 + MC^2 + 2QM \cdot z. \qquad (3)$$

Додамо ліві й праві частини рівностей (1), (2), (3):

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 =$$

$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3QM^2 - 2QM\left(x - y - z\right).$$

Але за *властивістю M* $x - y - z = 0$.

Таким чином,

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3QM^2.$$

Теорему Лейбниця доведено!

Задача 5. AM_1; BM_2; CM_3 — медіани в трикутнику ABC. Q — довільна точка зовні трикутника. Доведіть, що площа одного з трикутників AQM_1; BQM_2; CQM_3 дорівнює сумі площ двох інших.

Доведення. Через точку Q і центроїд M проведено пряму l (*рис. 6*). Знов-таки для прямої l буде виконуватись *властивість M*: $x = y + z$.

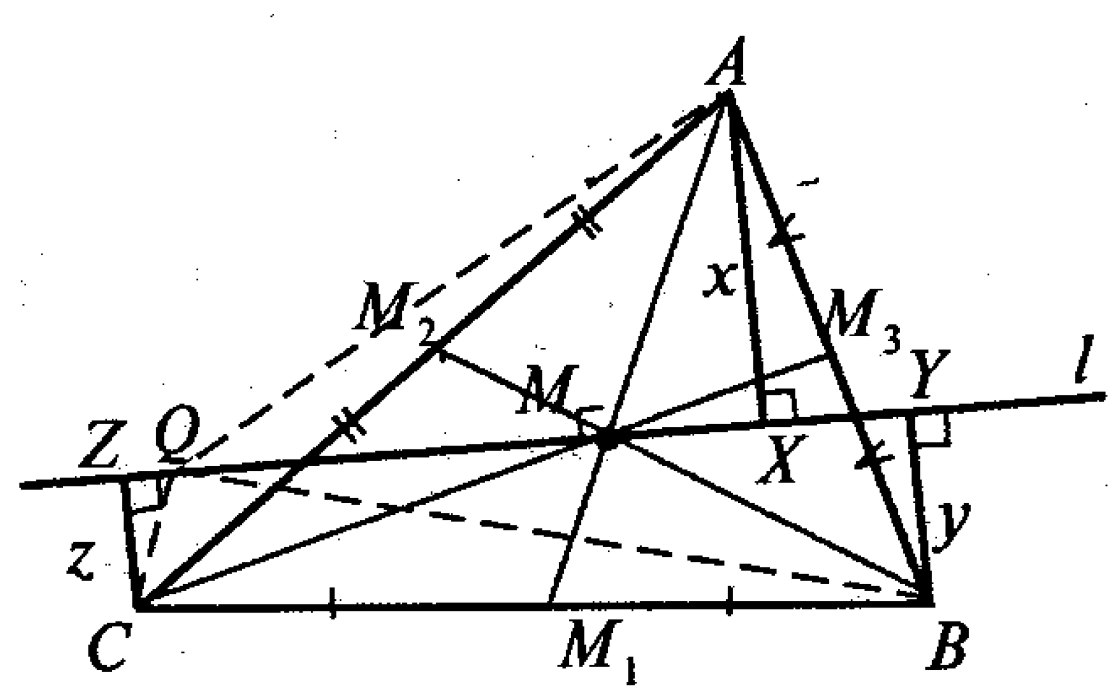

Рис. 6

Розглянемо такі трикутники: AQM; BQM; CQM. Вони мають спільну основу QM. А висота ΔAQM дорівнює сумі висот трикутників BQM і CQM: $x = y + z$ — за *властивістю M*. Тоді

$$S_{AQM} = S_{BQM} + S_{CQM}.$$

ГЕОМЕТРИЧНІ МІНІАТЮРИ

Очевидно, що $S_{AQM_1}=\frac{3}{2}S_{AQM}$ ($AM:MM_1=2:1$). Аналогічно $S_{BQM_2}=\frac{3}{2}S_{BQM}$ і $S_{CQM_3}=\frac{3}{2}S_{CQM}$. Скоротивши на $\frac{3}{2}$, маємо необхідне: $S_{AQM_1}=S_{BQM_2}+S_{CQM_3}$.

Задача 6. Через центр рівностороннього трикутника зі стороною a проведено довільну пряму l. Відстані від вершин A, B, C до l відповідно дорівнюють x, y, z. Доведіть що величина $x^2+y^2+z^2$ не залежить від того, яку пряму проведено через центр. Знайдіть значення цієї величини.

Доведення. Оскільки в рівносторонньому трикутнику $O\equiv M$, то знов-таки маємо: $AX=BY+CZ$, або $x=y+z$ (*рис. 7*). $AO=BO=CO=R$. (R — радіус описаного кола ΔABC). Нехай $\angle OAX=\alpha$. Неважко підрахувати, що в такому разі:

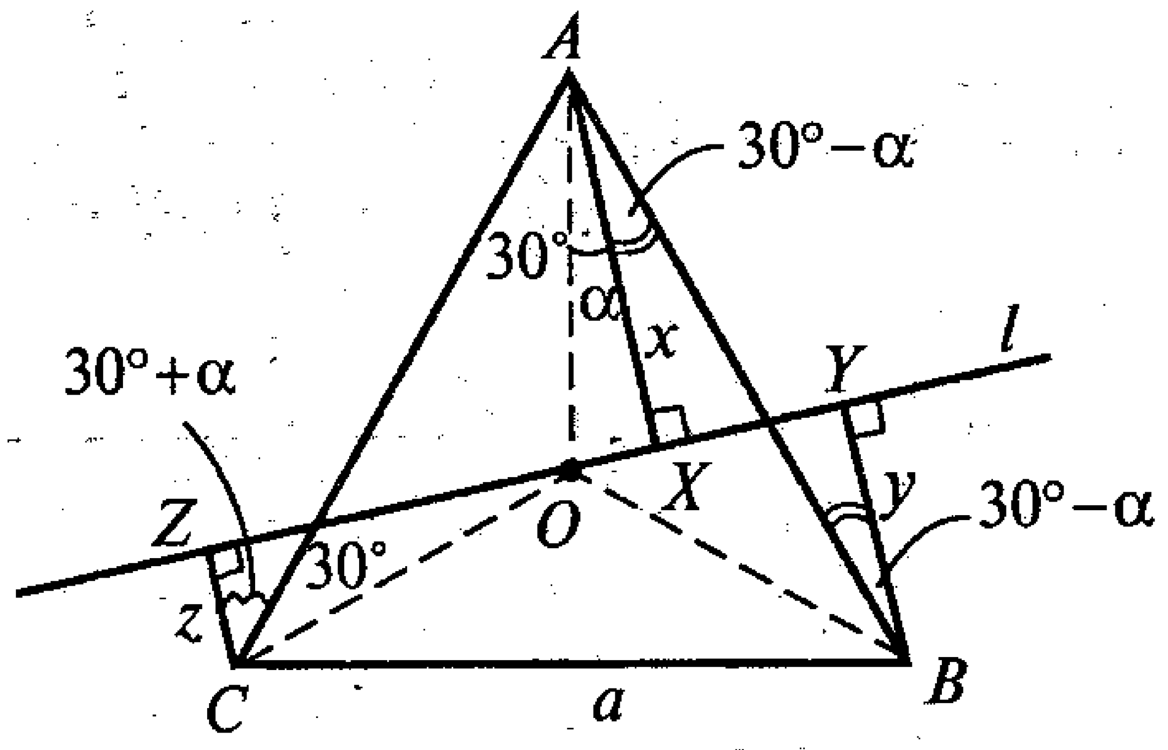

Рис. 7

$$\angle OBY=30^\circ+30^\circ-\alpha=60^\circ-\alpha;$$

$$\angle OCZ=30^\circ+30^\circ+\alpha=60^\circ+\alpha.$$

Тоді $x=R\cos\alpha$; $y=R\cos(60^\circ-\alpha)$ і $z=R\cos(60^\circ+\alpha)$. Звідси $x^2=R^2\cos^2\alpha$;

$$y^2+z^2=(y+z)^2-2yz=x^2-2yz=$$

$$=R^2\cos^2\alpha-2R\cos(60^\circ-\alpha)\cdot R\cos(60^\circ+\alpha)=$$

$$=R^2\cos^2\alpha-2R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(\cos2\alpha+\cos120^\circ)=$$

$$=R^2\cos^2\alpha-R^2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\frac{1}{2}\right)=R^2\sin^2\alpha+\frac{1}{2}R^2.$$

Таким чином,

$$x^2+y^2+z^2=R^2\cos^2\alpha+R^2\sin^2\alpha+\frac{1}{2}R^2=$$

$$=\frac{3}{2}R^2=\text{const}.$$

Але в рівносторонньому трикутнику $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Тож

$$x^2+y^2+z^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{3}=\frac{a^2}{2}=\text{const}.$$

На обидва питання задачі дано відповіді.

Задача 7. Через центроїд рівностороннього трикутника ABC зі стороною a проведіть пряму — у такий спосіб, щоб сума відстаней від вершин трикутника до цієї прямої була:

а) мінімальною;

б) максимальною.

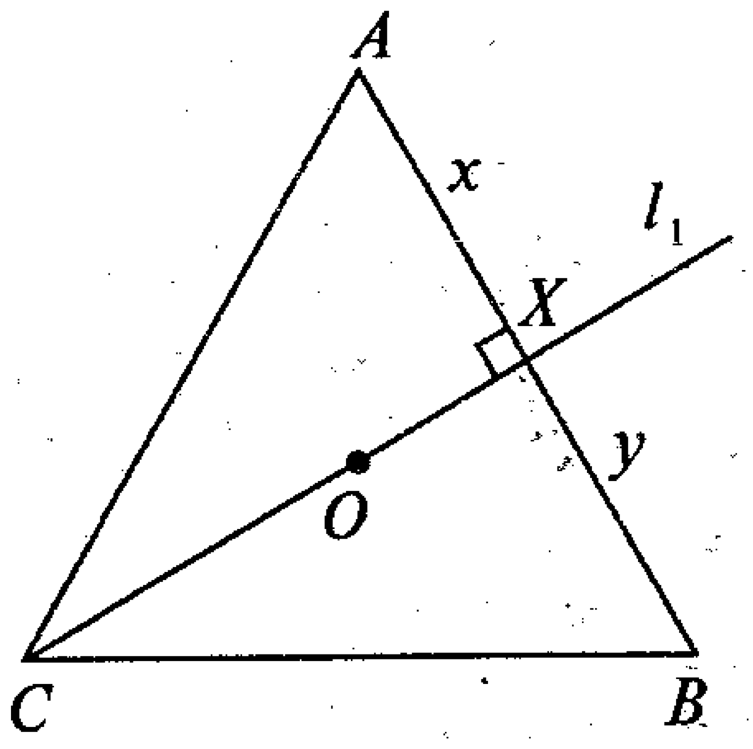

Рис. 8

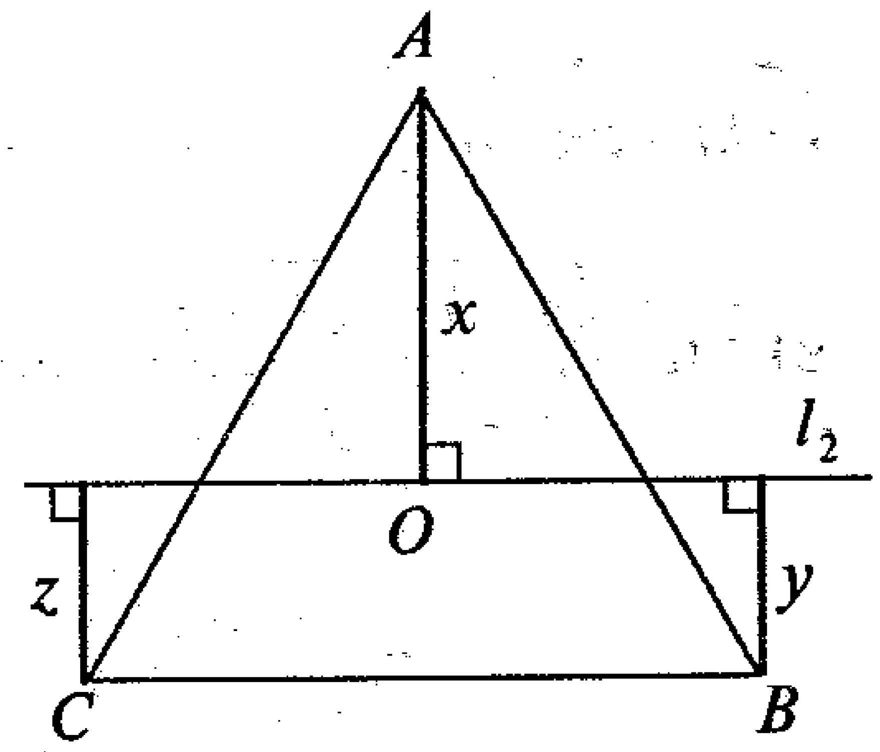

Рис. 9

Вказівка. Скориставшись *властивістю* M: $x=y+z$, розуміємо, що у випадку а) потрібно знайти $(2x)_{\min}$, а у випадку б) – $(2x)_{\max}$. Доведіть самостійно, що пряма l_1 на *рис. 8*, яка проходить через вершину C (або B), дає $(2x)_{\min}=a$. А пряма l_2 (*рис. 9*), яку проведено через центр O паралельно до BC, дає

$$(2x)_{\max}=2R=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$$