# Про відстані від вершини трикутника до його чудових точок

*О. Карлюченко та Г. Філіпповський*

У статті піде розмова про властивості відрізків, які з'єднують вершину $A$ трикутника $ABC$ з однією з чудових точок цього трикутника: точкою перетину висот $H$, точкою перетину медіан $M$, точкою перетину бісектрис $I$, центром описаного кола $O$, центром кола Ойлера (кола дев'яти точок) $E$.

## I. Відрізок $AH$.

**Властивість 1.** $AH = 2OM_1$, де $M_1$ — середина сторони $BC$.

*Доведення.* Проведемо діаметр $BD$ кола $\omega$, описаного навколо трикутника $ABC$ (рис. 1). Тоді $\angle DCB = \angle DAB = 90^\circ$ (вписані, спираються на діаметр). Тому $DC \parallel AH$ та $AD \parallel CH$. Отже, $ADCH$ — паралелограм та $DC = AH$. Але $DC = 2OM_1$, оскільки $OM_1$ — середня лінія трикутника $BDC$. Отже, $AH = 2OM_1$.

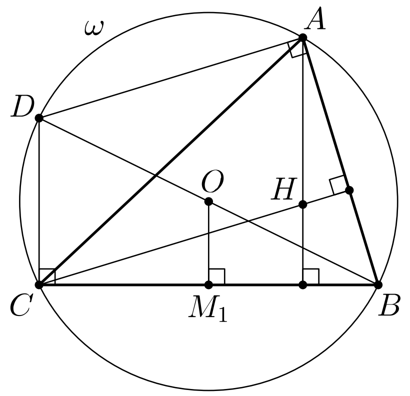


*рис. 1*

**Властивість 2.** $AH^2 = 4R^2 - a^2$, де $R$ — радіус описаного кола трикутника $ABC$ та $BC = a$.

*Доведення.* Розглянемо прямокутний трикутник $BOM_1$ (рис. 1), в якому $BO = R$ та $BM_1 = \frac{a}{2}$. За теоремою Піфагора знаходимо $OM_1^2 = BO^2 - BM_1^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$. Оскільки $AH^2 = 4OM_1^2$ (властивість 1), то $AH^2 = 4R^2 - a^2$.

**Властивість 3.** $AH = 2R \cdot |\cos A|$.

*Доведення.* Нехай $\angle BAC \le 90^\circ$. Оскільки $\angle BOC = 2A$ — центральний кут (рис. 1) та $BO = CO = R$, то $\angle COM_1 = \angle BOM_1 = A$. Тоді з прямокутного трикутника $BOM_1$ дістаємо, що $OM_1 = R \cdot \cos A$. Якщо $\angle BAC > 90^\circ$, то аналогічно $\angle BOC = 360^\circ - 2A$, $\angle BOM_1 = 180^\circ - A$ та $OM_1 = R \cdot \cos(180^\circ - A) = R \cdot |\cos A|$. Отже, у всіх випадках $AH = 2OM_1 = 2R \cdot |\cos A|$.

**Властивість 4.** $AH = a \cdot |\operatorname{ctg} A|$.

*Доведення.* За властивістю 3 маємо $AH = 2R \cdot |\cos A|$. Залишається підставити $2R = \frac{a}{\sin A}$ (теорема синусів).

**Властивість 5.** $AH = 2R + r - r_a$ ($r$ — радіус вписаного кола трикутника $ABC$, $r_a$ — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони $BC$ і продовжень двох інших сторін).

*Доведення.* Нехай $I$, $I_a$ — центри вписаного та зовнівписаного кіл, які дотикаються до сторони $BC$ у точках $K$ та $T$ відповідно (рис. 2). Тоді $IK = r$, $I_aT = r_a$. Нехай також $W$ — точка перетину бісектриси кута $A$ з колом $\omega$ та $N$ — точка перетину $TI$ з $OW$. Оскільки $\smile BW = \smile CW$, то $O - M_1 - W$ — одна пряма. Неважко показати, що $BK = CT$. Тоді $TM_1 = M_1K$. Очевидно, що $NW$ — середня лінія трикутника $ITI_a$ (з рівності $TM_1 = M_1K$ випливає рівність відрізків $IW$ та $WI_a$). Отже, $NW = \frac{r_a}{2}$. Але $NM_1$ — середня лінія трикутника $TIK$, тому $NM_1 = \frac{r}{2}$ та $M_1W = \frac{r_a - r}{2}$. Оскільки $OW = R$, то $OM_1 = R - \frac{r_a - r}{2}$, звідки $AH = 2OM_1 = 2R + r - r_a$, що завершує доведення.

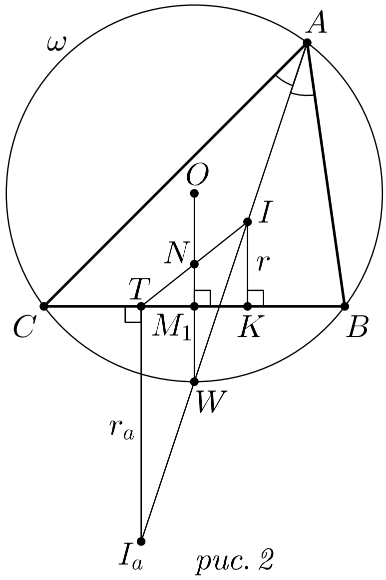

*рис. 2*

**Окремі випадки.**

**Задача 1.** У трикутнику $ABC$ відрізок $AH$ дорівнює стороні $BC$. Знайти величину кута $A$.

*Розв'язання.* За властивістю 4 маємо $AH = a\cdot|\operatorname{ctg} A|$. Згідно з умовою $a = a\cdot|\operatorname{ctg} A|$, звідки $|\operatorname{ctg} A| = 1$. Тому $A = 45°$ або $A = 135°$. І навпаки, у довільному трикутнику $ABC$ з кутом $A = 45°$ або $A = 135°$ за властивістю 4 буде $AH = a$.

**Задача 2.** Знайти величину кута $A$ трикутника $ABC$, якщо відомо, що $AH = R$.

*Розв'язання.* За властивістю 3 маємо $R = 2R \cdot |\cos A|$, звідки $|\cos A| = \frac{1}{2}$. Тоді $A = 60°$ або $A = 120°$. І навпаки, у довільному трикутнику $ABC$ з кутом $A = 60°$ або $A = 120°$ за властивістю 3 буде $AH = a$.

**Задача 3.** У гострокутному трикутнику $ABC$ відомо, що $AH = R$. Доведіть, що $IO = IH$.

*Доведення.* Неважко показати, що

$$\angle BAH = \angle CAO = 90° - B.$$

Звідси випливає, що промінь $AI$ є спільною бісектрисою кутів $\angle BAC$ та $\angle HAO$, а отже $\angle HAI = \angle IAO$ (рис. 3). Тоді трикутники $HAI$ та $OAI$ рівні за двома сторонами та кутом між ними, звідки $IO = IH$.

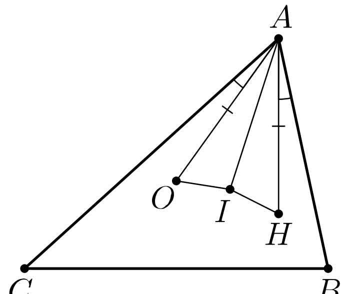

*рис. 3*

**Задача 4.** У гострокутному трикутнику $ABC$ відомо, що $AH = 2r$. Доведіть, що $OI \parallel BC$.

*Доведення.* Якщо $AH = 2r$, то $OM_1 = \frac{1}{2}AH = r$. Точки $O$ та $I$ знаходяться по одну сторону від прямої $BC$ на однаковій відстані від неї (рівній $r$). Отже, $OI \parallel BC$.

**Задача 5.** У гострокутному трикутнику $ABC$ відомо, що $AH = r$. Доведіть, що точки $M_1$, $I$, $H$ лежать на одній прямій.

*Доведення.* Нехай пряма $M_1I$ перетинає висоту $AH_1$ у точці $F$. Покажемо, що $AF = r$. Оскільки $AH = r$, то звідси випливатиме, що точки $H$ та $F$ збігаються, тобто $H$ лежить на прямій $M_1I$. Нехай $W$ — точка перетину бісектриси кута $A$ з описаним колом трикутника $ABC$ та $K$ — точка дотику вписаного у трикутник $ABC$ кола зі стороною $AC$. Неважко перевірити, що трикутники $AFI$ та $WM_1I$, $AKI$ та $BM_1W$ подібні (рис. 4). Тому $AF : M_1W = AI : IW$ та $KI : M_1W = AI : BW$. Оскільки $BW = IW$ (теорема про "тризуб"), то звідси $AF = KI = r$.

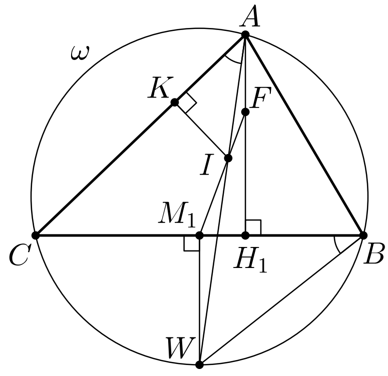

*рис. 4*

## II. Відрізок $AM$.

**Властивість 6.** $AM = \frac{2}{3}m_a$, де $m_a = AM_1$ — медіана трикутника $ABC$.

*Доведення.* Це так, оскільки медіани трикутника перетинаються в одній точці та діляться нею у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини.

**Властивість 7.** $AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$.

*Доведення.* Ця формула випливає з формули довжини медіани $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$, бо $AM = \frac{2}{3}m_a$.

**Властивість 8.** $AM^2 \geq \frac{4}{9}\,p(p-a)$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника.

*Доведення.* Внаслідок властивості 7 маємо

$$\begin{aligned}9AM^2 - 4p(p-a) =& 2(b^2+c^2) - a^2 - 4\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2} = \\ =& 2b^2 + 2c^2 - a^2 - ((b+c)^2 - a^2) = (b-c)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

**Окремі випадки.**

**Задача 6.** Нехай $AM = a$. Доведіть, що медіани, проведені з вершин $B$ та $C$, перпендикулярні.

*Доведення.* Нехай $AM_1$, $BM_2$ та $CM_3$ — медіани трикутника (рис. 5). За умовою $MM_1 = \frac{AM}{2} = \frac{BC}{2}$. Отже, у трикутнику $BMC$ медіана, проведена до сторони $BC$, дорівнює половині цієї сторони. Звідси випливає, що $\angle BMC = 90°$.

**Задача 7.** Нехай $AM = a$. Доведіть, що $b^2 + c^2 = 5a^2$.

*Доведення.* Якщо $AM = a$, то за властивістю 7 маємо $a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$, або $9a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, звідки $b^2 + c^2 = 5a^2$.

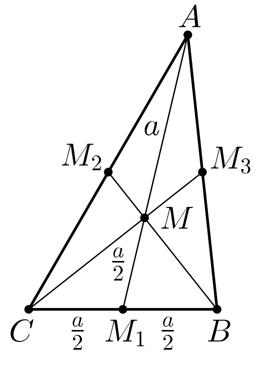

*рис. 5*

**Задача 8.** Нехай $AM = R$. Доведіть, що $A \leq 60°$.

*Доведення.* За нерівністю трикутника для відстаней між точками $A, O, M_1$ маємо $AO + OM_1 \geq AM_1$ (рис. 6). Оскільки $AO = R$, $AM_1 = \frac{3}{2}AM = \frac{3}{2}R$ та $OM_1 = R|\cos A|$, то $R + R|\cos A| \geq \frac{3}{2}R$, або $|\cos A| \geq \frac{1}{2}$, звідки $A \leq 60°$ або $A \geq 120°$. Але якщо кут $A$ тупий, то точка $A$ лежить всередині кола, побудованого на $BC$ як на діаметрі. Тоді $AM_1 < \frac{1}{2}BC \leq R$, що суперечить рівності $AM_1 = \frac{3}{2}R$. Отже, можливий лише випадок $A \leq 60°$.

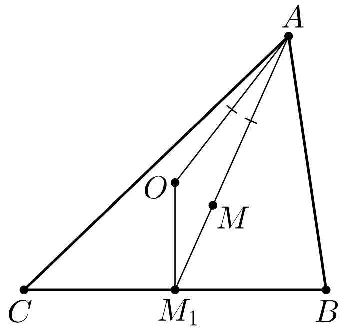

*рис. 6*

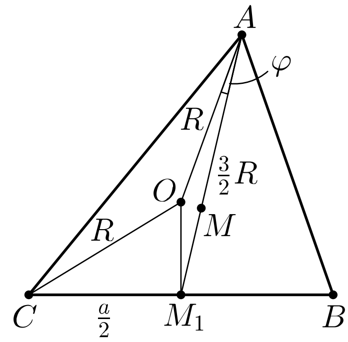

*рис. 7*

**Задача 9.** Нехай $AM = R$. Доведіть, що $\cos\varphi = \frac{b^2+c^2}{6R^2}$, де $\varphi = \angle OAM$.

*Доведення.* Оскільки $R^2 = AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$ (властивість 7), то $2(b^2+c^2) = 9R^2+a^2$. За теоремою косинусів для трикутника $OAM_1$ та за теоремою Піфагора для трикутника $OCM_1$ (рис. 7) знаходимо

$$OM_1^2 = R^2 + \frac{9}{4}R^2 - 3R^2\cos\varphi = R^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Звідси

$$\cos\varphi = \frac{9R^2+a^2}{12R^2} = \frac{2(b^2+c^2)}{12R^2} = \frac{b^2+c^2}{6R^2}.$$

**Задача 10.** Чи існує трикутник $ABC$, в якому $AM = r$?

*Розв'язання.* У будь-якому трикутнику $ABC$ медіана $m_a$ не коротша за висоту $h_a$, тому $m_a \geq h_a > 2r$. Звідси $AM = \frac{2}{3}m_a > \frac{4}{3}r$ та рівність $AM = r$ неможлива.

**Задача 11.** У нерівнобедреному трикутнику $ABC$ відомо, що $AM = 2r$. Яка з точок ближче до сторони $BC$: $I$ чи $M$?

*Розв'язання.* Оскільки $MM_1 = \frac{1}{2}AM = r$, то відстань від точки $M$ до прямої $BC$ менша за $BC$ (довжина перпендикуляра менша за довжину похилої). А відстань від точки $I$ до прямої $BC$ дорівнює $r$. Отже, точка $M$ ближче.

**Задача 12.** Нехай $AM = MD$, де $D$ — точка перетину променя $AM$ з описаним навколо трикутника $ABC$ колом. Довести, що квадрати сторін трикутника $ABC$ утворюють арифметичну прогресію.

*Доведення.* Оскільки $M$ — середина $AD$ та $AM_1 = \frac{3}{2}AM$, то $DM_1 = 2AM - AM_1 = \frac{1}{2}AM$ (рис. 8). Тоді для хорд $BC$ та $AD$ маємо

$$BM_1 \cdot CM_1 = \frac{a^2}{4} = AM_1 \cdot DM_1 = \frac{3}{4}AM^2.$$

Враховуючи, що $AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$ (властивість 7), дістаємо, що $\frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{12}$, звідки $3a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, або $2a^2 = b^2 + c^2$, тобто $b^2, a^2, c^2$ — арифметична прогресія.

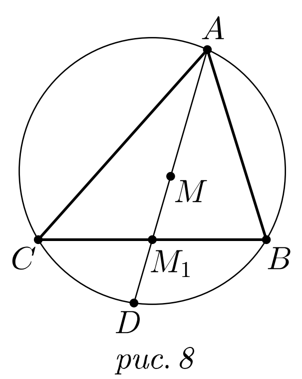

*рис. 8*

## III. Відрізок $AO = R$.

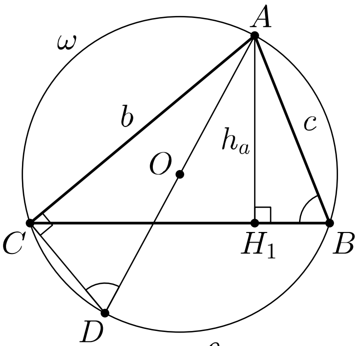

*рис. 9*

**Властивість 9.** $AO = \frac{a}{2\sin A}$ (теорема синусів).

**Властивість 10.** $AO = \frac{bc}{2h_a}$.

*Доведення.* Нехай коло $\omega$ описане навколо трикутника $ABC$ (рис. 9). Проведемо діаметр $AD$. Прямокутні трикутники $ABH_1$ та $ADC$ подібні за двома кутами. Тоді $\frac{b}{h_a} = \frac{2R}{c}$, або $bc = 2Rh_a$ (формула Брахмагупти). Отже, $AO = R = \frac{bc}{2h_a}$.

**Властивість 11.** $AO = \frac{abc}{4S}$.

**Властивість 12.** $AO \geq 2r$.

*Доведення.* Згідно з формулою Ойлера $OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R-2r) \geq 0$. Тому $R - 2r \geq 0$, або $AO = R \geq 2r$.

**Окремі випадки.**

**Задача 13.** Нехай $AO = a$. Знайдіть величину кута $A$.

*Розв'язання.* За теоремою синусів $AO = \frac{a}{2\sin A}$. Отже, рівність $a = \frac{a}{2\sin A}$ виконується тоді й лише тоді, коли $\sin A = \frac{1}{2}$, тобто при $A = 30^\circ$ або $A = 150^\circ$.

**Задача 14.** Визначте вид трикутника $ABC$, в якому $AO = 2r$.

*Розв'язання.* За формулою Ойлера $OI^2 = R^2 - 2Rr = 4r^2 - 4r^2 = 0$. Отже, точки $O$ та $I$ збігаються, а це можливо лише у рівносторонньому трикутнику.

## IV. Відрізок $AI$.

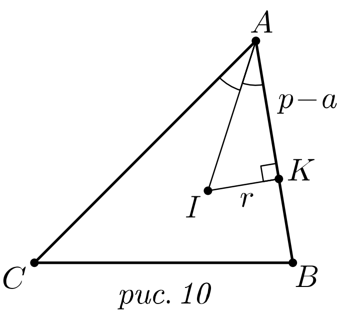

*рис. 10*

**Властивість 13.** а) $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$; б) $AI = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$.

*Доведення.* Нехай $K$ — точка дотику вписаного у трикутник $ABC$ кола зі стороною $AB$. Тоді трикутник $AIK$ прямокутний, $IK = r$ та $AK = p - a$ (рис. 10), звідки $r = AI\sin\frac{A}{2}$ та $p - a = AI\cos\frac{A}{2}$.

**Властивість 14.** $AI = \sqrt{bc(p-a)/p}$.

*Доведення.* Перемножимо ліві та праві частини рівностей із пунктів а) та б) властивості 13:

$$AI^2 = \frac{r(p-a)}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{2r(p-a)}{\sin A} = \frac{2bcpr(p-a)}{bcp\sin A} = \frac{2bcS(p-a)}{2Sp} = \frac{bc(p-a)}{p}.$$

Звідси $AI = \sqrt{bc(p-a)/p}$.

**Властивість 15.** $AI = \frac{b+c}{a} \cdot IL_1$, де $AL_1$ — бісектриса кута $A$.

*Доведення.* За властивістю бісектриси $\frac{b}{c} = \frac{CL_1}{BL_1} = \frac{CL_1}{a - CL_1}$, звідки $CL_1 = \frac{ab}{b+c}$ (рис. 11). Оскільки $CI$ — бісектриса трикутника $ACL_1$, то знову за властивістю бісектриси дістаємо

$$\frac{AI}{IL_1} = \frac{b}{CL_1} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a},$$

тобто $AI = \frac{b+c}{a} \cdot IL_1$.

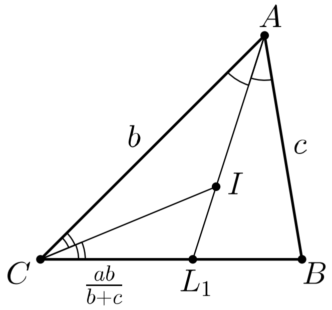


*рис. 11*

**Властивість 16.** $AI = AL_1 \cdot \frac{b+c}{2p}$.

*Доведення.* За властивістю 15 маємо $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$, або $\frac{IL_1}{AI} = \frac{a}{b+c}$. Тоді

$$\frac{IL_1}{AI} + 1 = \frac{a}{b+c} + 1, \quad \frac{IL_1 + AI}{AI} = \frac{AL_1}{AI} = \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{2p}{b+c}.$$

Звідси $AI = AL_1 \cdot \frac{b+c}{2p}$.

**Властивість 17.** $AI^2 = bc - 4Rr$.

*Доведення.* Згідно із властивістю 14 маємо

$$AI^2 = \frac{bc(p-a)}{p} = bc - \frac{abc}{p} = bc - \frac{4SR}{p} = bc - \frac{4prR}{p} = bc - 4Rr.$$

**Властивість 18.** а) $AI = \frac{bc}{AI_a}$; б) $AI = \frac{2Rh_a}{AI_a}$.

*Доведення.* Оскільки $CI$ — бісектриса кута $C$ трикутника $ABC$, а $CI_a$ — бісектриса суміжного з ним зовнішнього кута, то $\angle ICI_a = 90^\circ$ (рис. 12). Але $\angle CII_a = \frac{A+C}{2}$ (зовнішній кут трикутника $AIC$), тому третій кут трикутника $ICI_a$ дорівнює $\frac{B}{2}$. Отже, трикутники $ABI$ та $AI_aC$ подібні за двома кутами. Таким чином, $\frac{AI}{b} = \frac{c}{AI_a}$, тобто $AI = \frac{bc}{AI_a}$.

Звідси одразу дістаємо рівність б), оскільки $bc = 2R \cdot h_a$ (властивість 10).

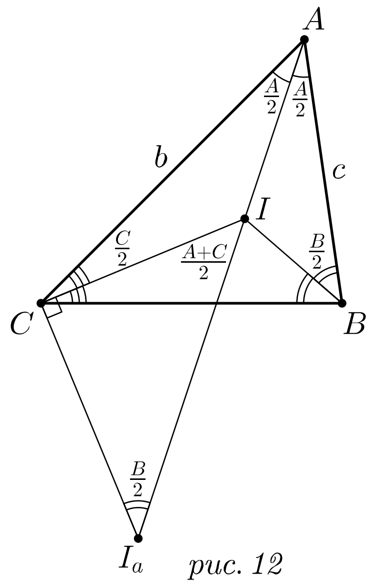


*рис. 12*

**Окремі випадки.**

**Задача 15.** Нехай $AI = a$. Доведіть, що площа трикутника $ABC$ дорівнює $S = \frac{r^3}{2a-p}$.

*Доведення.* За теоремою Піфагора $AI^2 = r^2 + (p-a)^2$ (рис. 10). Враховуючи, що $AI = a$, дістаємо $r^2 = a^2 - (p-a)^2 = (2a-p) \cdot p$, $r^3 = (2a-p) \cdot S$ та $S = \frac{r^3}{2a-p}$.

**Задача 16.** Нехай $AI = R$. Доведіть, що $AI_a = 2h_a$.

*Доведення.* За властивістю 18 маємо $AI = \frac{2Rh_a}{AI_a}$. Отже, $R = \frac{2Rh_a}{AI_a}$ та $AI_a = 2h_a$.

**Задача 17.** Нехай $AI = R$. Доведіть, що величина кута $A$ не перевищує $60°$.

*Доведення.* Нехай $K$ — точка дотику вписаного у трикутник $ABC$ кола зі стороною $AB$ (рис. 13). Тоді $\sin\frac{A}{2} = \frac{IK}{AI} = \frac{r}{R}$. Оскільки $r \le \frac{R}{2}$ (властивість 12), то $\sin\frac{A}{2} \le \frac{1}{2}$. Звідси $\frac{A}{2} \le 30°$, тобто $A \le 60°$.

**Задача 18.** Нехай $AI = R$. Доведіть, що відстань між центром вписаного у трикутник $ABC$ кола та центром зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони $BC$, дорівнює $4r$.

*Доведення.* За теоремою синусів для трикутника $ABW$ маємо $\frac{BW}{\sin\frac{A}{2}} = 2R$ (рис. 13). Тому

$$BW = 2R \cdot \sin\frac{A}{2} = 2R \cdot \frac{r}{R} = 2r.$$

Оскільки $BW = CW = IW = WI_a$ (теорема про "тризуб"), то $II_a = 4r$.

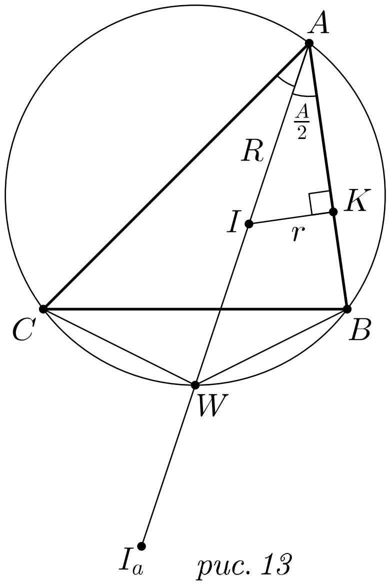

*рис. 13*

**Задача 19.** Нехай $AI = 2r$. Доведіть, що $A = 60°$.

*Доведення.* За властивістю 13а) маємо $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$. Тому $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, звідки $\frac{A}{2} = 30°$ та $A = 60°$.

**Задача 20.** Нехай $AI = 2IL_1$. Доведіть, що а) $b + c = 2a$; б) $MI \parallel BC$.

*Доведення.* а) За властівістю 15 маємо $AI = \frac{b+c}{a} \cdot IL_1$. Отже, $2IL_1 = \frac{b+c}{a} \cdot IL_1$, або $b + c = 2a$.

б) Оскільки $\frac{AI}{IL_1} = 2$ (за умовою) та $\frac{AM}{MM_1} = 2$ (медіани діляться точкою перетину у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини), то $MI \parallel BC$.

## V. Відрізок $AE$, де $E$ — центр кола Ойлера.

Добре відомо, що у довільному трикутнику основи медіан $M_1, M_2, M_3$, основи висот $H_1, H_2, H_3$ та $E_1, E_2, E_3$ — середини відрізків $AH, BH, CH$ відповідно — лежать на одному колі, яке називають колом дев'яти точок або колом Ойлера (рис. 14). Оскільки $OM_1$, $HH_1$ та серединний перпендикуляр до $M_1H_1$ паралельні, то цей серединний перпендикуляр проходить через середину $OH$. Аналогічно через середину $OH$ проходять серединні перпендикуляри до $M_2H_2$ та $M_3H_3$, тому центр кола Ойлера $E$ є серединою відрізка $OH$.

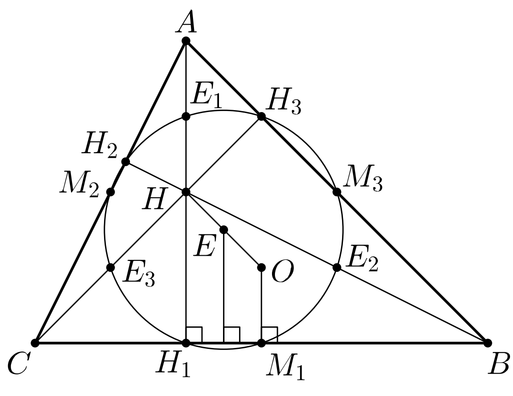

*рис. 14*

**Властивість 19.** $AE^2 = \frac{R^2+b^2+c^2-a^2}{4}$.

*Доведення.* Покажемо, що точка перетину медіан $M$ належить відрізку $OH$. Справді, оскільки $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$ (рис. 15), а з властивості 1 випливає, що $AH : M_1O = AM : M_1M = 2 : 1$. Тому трикутники $AHM$ та $M_1OM$ подібні, звідки $\angle AMH = \angle M_1MO$, тобто $H - M - O$ — одна пряма. Одночасно ми дістали, що $HM = 2MO$. Відмітимо на відрізку $OH$ також точку $N$, для якої $HN = NM = MO$. Тоді $N$ — середина $HM$ та $M$ — середина $NO$.

Запишемо для трикутників $AHM$ та $AON$ формулу довжини медіани:

$$AN^2 = \tfrac{2(AH^2+AM^2)-HM^2}{4}, \quad AM^2 = \tfrac{2(AN+AO^2)-NO^2}{4}.$$

Зауважимо, що квадрати довжин відрізків $AO$, $AH$ та $AM$ відомі:

$$AO^2 = R^2,\ AH^2 = 4R^2 - a^2,\ AM^2 = \tfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$$

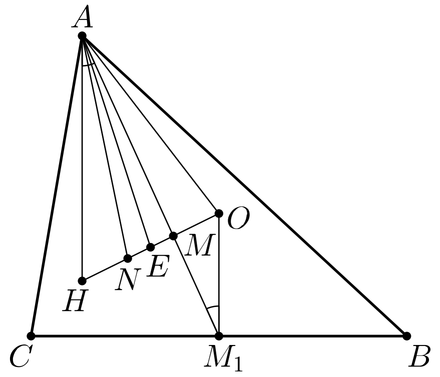

*рис. 15*

(властивості 2 і 7). Позначимо $HM^2 = NO^2 = x$, $AN^2 = y$. Тоді

$$\begin{cases} 4y = 2AH^2 + 2AM^2 - x, \\ 4AM^2 = 2y + 2AO^2 - x, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x = \frac{2AH^2-6AM^2+4AO^2}{3}, \\ y = \frac{AH^2+3AM^2-AO^2}{3}. \end{cases}$$

Таким чином, $OH^2 = \left(\frac{3}{2}HM\right)^2 = \frac{9}{4}x = \frac{3}{2}AH^2 - \frac{9}{2}AM^2 + 3AO^2 =$

$$= \tfrac{3}{2}(4R^2 - a^2) - \tfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{2} + 3R^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$

Оскільки $E$ — середина відрізка $OH$, то за формулою довжини медіани

$$AE^2 = \tfrac{2(AO^2+AH^2)-OH^2}{4} = \tfrac{2(R^2+4R^2-a^2)-(9R^2-a^2-b^2-c^2)}{4} = \tfrac{R^2+b^2+c^2-a^2}{4}.$$

**Окремі випадки.**

**Задача 21.** Знайдіть кут $A$ трикутника $ABC$, в якому $AE^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-5R^2}{4}$.

*Розв'язання.* За властивістю 19 маємо $\frac{a^2+b^2+c^2-5R^2}{4} = \frac{R^2+b^2+c^2-a^2}{4}$. Після очевидних перетворень дістаємо, що $a = R\sqrt{3}$. Але за теоремою синусів $a = 2R\sin A$. Отже, $2R\sin A = R\sqrt{3}$ та $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тоді $A = 60^\circ$ або $A = 120^\circ$.

**Задача 22.** Нехай $AE = \frac{R}{2}$. Доведіть, що трикутник $ABC$ прямокутний.

*Доведення.* За властивістю 19 маємо $AE^2 = \frac{R^2+b^2+c^2-a^2}{4} = \frac{R^2}{4}$, отже $b^2 + c^2 = a^2$.

## VI. Який із відрізків більший?

Спробуємо з'ясувати, який із відрізків більший: від вершини до чудової точки або його продовження — від чудової точки до сторони трикутника. Чи завжди це можна визначити однозначно?

**Задача 23.** Який із відрізків більший: $AM$ чи $MM_1$?

*Розв'язання.* Відрізок $AM$ більше вдвічі, адже $\frac{AM}{MM_1} = 2$.

**Задача 24.** Що більше: $AI$ чи $IL_1$?

*Розв'язання.* За властивістю 11 маємо $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$. Але $b + c > a$ (нерівність трикутника). Тому $AI > IL_1$.

**Задача 25.** Нехай промінь $AO$ перетинає $BC$ у точці $N$. Що більше: $AO$ чи $ON$?

*Розв'язання.* Точка $N$ знаходиться всередині описаного кола трикутника $ABC$. Тому $ON < R$, а оскільки $AO = R$, то $AO > ON$.

**Задача 26.** Що більше: $AH$ чи $HH_1$?

*Розв'язання.* Якщо $\angle A \geq 90°$, то $HH_1 > AH$, оскільки точка $A$ належить відрізку $HH_1$. Якщо $\angle B \geq 90°$ або $\angle C \geq 90°$, то $AH > HH_1$, оскільки точка $H_1$ належить відрізку $AH$.

Нехай тепер трикутник $ABC$ гострокутний. Тоді $AH = 2R\cos A$, $BH = 2R\cos B$ (властивість 3). Оскільки $\angle CBH_2 = 90° - C$ (рис. 16), то $\angle BHH_1 = C$. Звідси дістаємо, що $HH_1 = BH\cos C = 2R\cos B\cos C$. Отже,

$$\frac{AH}{HH_1} = \frac{2R\cdot\cos A}{2R\cos B\cos C} = \frac{\cos A}{\cos B\cos C} = \frac{-\cos(B+C)}{\cos B\cos C} = \frac{\sin B\sin C - \cos B\cos C}{\cos B\cos C} = \operatorname{tg} B\operatorname{tg} C - 1.$$

Тому $AH > HH_1$ при $\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C > 2$ та $AH < HH_1$ при $\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C < 2$.

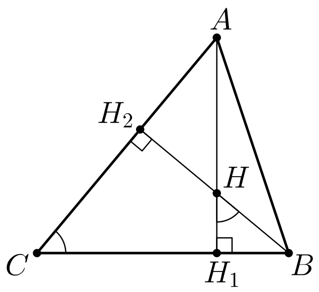


*рис. 16*

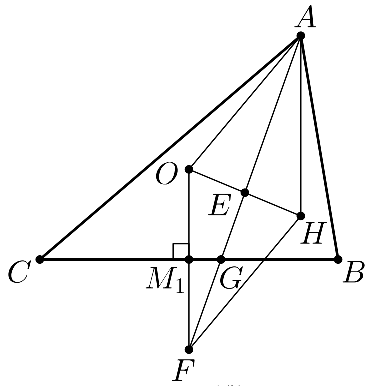


*рис. 17*

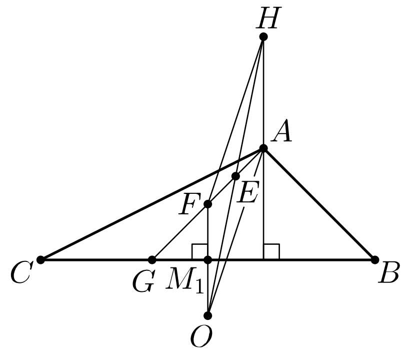


*рис. 18*

**Задача 27.** Нехай $G$ — точка перетину прямих $AE$ та $BC$. Що більше: $AE$ чи $EG$?

*Розв'язання.* а) Нехай кут $A$ гострий. Відкладемо на продовженні $OM_1$ відрізок $M_1F = OM_1$ (рис. 17). Оскільки $OM_1 = \frac{1}{2}AH$, то $OF = AH$ та $OF \parallel AH$, звідки $AOFH$ паралелограм. Точка $E$ — середина діагоналі $OH$, тому $E$ також є серединою діагоналі $AF$. Точки $A$ та $F$ знаходяться по різні сторони від $BC$, тому точка $G$ лежить між $A$ та $F$, звідки $EG < \frac{1}{2}AF = AE$. Отже, $AE > EG$.

б) Нехай кут $A$ тупий. Відкладемо на продовженні $OM_1$ відрізок $M_1F = OM_1$ та знову дістанемо паралелограм $AOFH$, в якому $E$ буде точкою перетину діагоналей (рис. 18). Точки $A$ та $F$ знаходяться по одну сторону від $BC$, тому точка $G$ не належить відрізку $AF$ та $EG > \frac{1}{2}AF = AE$. Отже, у цьому випадку $AE < EG$.

в) Нехай кут $A$ прямий. Тоді точка $H$ збігається з $A$, а точка $O$ збігається з $M_1$. Оскільки $E$ — середина $OH$, то $E$ — середина $AM_1$, а точка $G$ збігається з $M_1$. Звідси $AE = EG$.

## VII. Куди ближче?

Нехай $A > B > C$ і відповідно $a > b > c$. Визначимо, найближче до якої з вершин розташована та або інша чудова точка.

**Задача 28.** До якої з вершин найближче точка $O$?

*Розв'язання.* До жодної! Адже $AO = BO = CO = R$.

**Задача 29.** До якої з вершин найближче точка $H$?

*Розв'язання.* За властивістю 2 маємо

$$AH^2 = 4R^2 - a^2,\ BH^2 = 4R^2 - b^2,\ CH^2 = 4R^2 - c^2.$$

Оскільки $a$ — найбільша сторона, то відрізок $AH$ найменший, тобто точка $H$ розташована найближче до вершини найбільшого кута трикутника.

**Задача 30.** До якої з вершин найближче точка $M$?

*Розв'язання.* За властивістю 7

$$AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}, \quad BM^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{9}, \quad CM^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{9}.$$

Очевидно, що найменшим є відрізок $AM$. Точка $M$ теж розташована найближче до вершини найбільшого кута.

**Задача 31.** До якої з вершин найближче точка $I$?

*Розв'язання.* За властивістю 17

$$AI^2 = bc - 4Rr, \quad BI^2 = ac - 4Rr, \quad CI^2 = ab - 4Rr.$$

Оскільки $a > b > c$, то величина $AI^2 = bc - 4Rr$ найменша. Точка $I$ найближче до вершини найбільшого кута трикутника $ABC$.

**Задача 32.** До якої з вершин найближче точка $E$?

*Розв'язання.* З властивості 19 випливає, що і точка $E$ найближче до вершини найбільшого кута. Справді,

$$AE^2 = \tfrac{R^2+b^2+c^2-a^2}{4} < BE^2 = \tfrac{R^2+a^2+c^2-b^2}{4} < CE^2 = \tfrac{R^2+a^2+b^2-c^2}{4}.$$

Наостанок пропонуємо цікаву рівність, яка пов'язує одразу чотири з "наших" відстаней.

**Задача 33.** Доведіть, що $8AE^2 + 2AO^2 = 9AM^2 + AH^2$.

*Доведення.* Під час доведення властивості 19 було встановлено, що

$$OH^2 = \tfrac{3}{2}AH^2 - \tfrac{9}{2}AM^2 + 3AO^2.$$

Оскільки $AE$ — медіана трикутника $AOH$, то звідси

$$AE^2 = \tfrac{2(AO^2+AH^2)-OH^2}{4} = \tfrac{4(AO^2+AH^2)-3AH^2+9AM^2-6AO^2}{8} = \tfrac{AH^2-2AO^2+9AM^2}{8},$$

тобто $8AE^2 + 2AO^2 = 9AM^2 + AH^2$.