Подвійне відношення

Михайло Плотніков[1]

У статті розповідається про подвійне відношення та його властивості. Цей матеріал дозволяє ефективно та ефектно доводити класичні теореми проективної геометрії. А ще — помічати нові цікаві закономірності у геометрії шкільній. А ще — знаходити більш прості розв'язання багатьох досить складних, зокрема олімпіадних, задач.

Сподіваємось, що читачі журналу захочуть взяти на озброєння подвійні відношення, а велика кількість розв'язаних у статті задач їм у цьому допоможе.

Задачі, які містять важливі результати, що використовуються в подальшому, позначено знаком (!).

Подвійне відношення чотирьох точок на одній прямій та чотирьох прямих

Означення 1. Подвійним відношенням чотирьох точок A, B, C, D, що належать одній прямій, називається величина

$$(AB, CD) = \pm \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

знак якої вважається від'ємним, якщо рівно одна з точок C, D лежить між A та B, і додатним у решті випадків.

Якщо на прямій задано координати, то подвійне відношення можна виразити через координати x_A, x_B, x_C, x_D точок A, B, C, D, а саме

$$(AB, CD) = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} : \frac{x_D - x_A}{x_D - x_B} = \frac{(x_C - x_A)(x_D - x_B)}{(x_C - x_B)(x_D - x_A)}.$$

(Перевірте, що знак цього виразу завжди саме такий, як вимагається в означенні подвійного відношення.)

Також корисно простежити, як зміниться подвійне відношення, якщо змінити порядок точок:

$$(AB, CD) = \frac{1}{(BA, CD)} = \frac{1}{(AB, DC)} = (BA, DC) = 1 - (AC, BD) = (DC, BA).$$

Означення 2. Подвійним відношенням чотирьох прямих a, b, c, d, які перетинаються в одній точці, називається величина

$$(a, b; c, d) = \pm \frac{\sin \angle(a, c)}{\sin \angle(b, c)} : \frac{\sin \angle(a, d)}{\sin \angle(b, d)},$$

знак якої вважається від'ємним, якщо рівно одна з прямих c, d лежить у кожній з пар вертикальних кутів, утворених прямими a та b, і додатним у протилежному випадку.

---

[1] учень 11 класу Русанівського ліцею м. Києва

Подвійне відношення чотирьох попарно не паралельних прямих a, b, c, d вважають рівним подвійному відношенню паралельних їм прямих, які перетинаються в одній точці.

Задача 1 (!). Нехай прямі a, b, c, d перетинаються в точці O і перетинають пряму l в точках A, B, C, D відповідно. Довести, що $(a, b; c, d) = (AB, CD)$.

Розв'язання. Нехай відстань від точки O до прямої l дорівнює h. Обчислимо площу трикутника OAC двома способами: $S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}AC \cdot h = \frac{1}{2}OA \cdot OC \sin\angle(a, c)$. Звідси $\sin\angle(a, c) = \frac{AC \cdot h}{OA \cdot OC}$ та аналогічно

$$\sin\angle(b, c) = \frac{BC \cdot h}{OB \cdot OC}, \quad \sin\angle(a, d) = \frac{AD \cdot h}{OA \cdot OD}, \quad \sin\angle(b, d) = \frac{BD \cdot h}{OB \cdot OD}.$$

Таким чином,

$$|(a, b; c, d)| = \left|\frac{\sin\angle(a, c)\sin\angle(b, d)}{\sin\angle(b, c)\sin\angle(a, d)}\right| = \left|\frac{AC \cdot BD \cdot h^2 \cdot OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}{BC \cdot AD \cdot h^2 \cdot OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}\right| = |(AB, CD)|.$$

Неважко перевірити, що домовленості про знак подвійного відношення чотирьох точок та чотирьох прямих також узгоджуються.

Означення 3. Центральним проектуванням прямої l на пряму l_1 відносно точки O називають перетворення, яке ставить у відповідність кожній точці A прямої l таку точку A_1 прямої l_1, що пряма AA_1 проходить через точку O.

Внаслідок задачі 1 центральне проектування зберігає подвійне відношення чотирьох точок. Справді, якщо воно переводить точки A, B, C, D прямої l у точки A_1, B_1, C_1, D_1 прямої l_1 (рис. 1), то

$$(AB, CD) = (a, b; c, d) = (A_1B_1, C_1D_1).$$

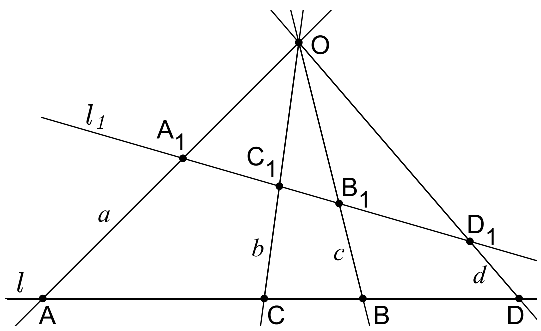

Рис. 1.

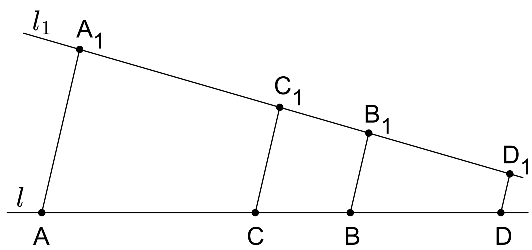

Рис. 2.

Отриману рівність зручно записувати так: $(AB, CD) \overset{O}{=} (A_1B_1, C_1D_1)$, аби підкреслити, що використовувалось проектування відносно точки O.

З теореми про пропорційні відрізки випливає, що подвійне відношення чотирьох точок зберігається і при паралельному проектуванні (рис. 2).

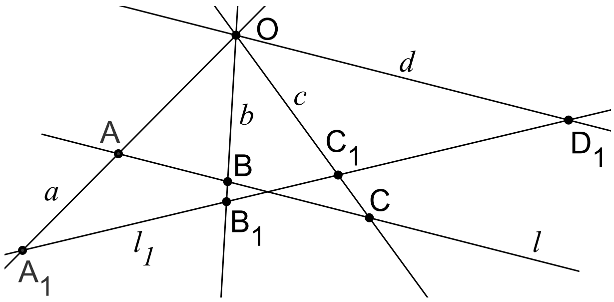

Рис. 3.

На рис. 3 зображено прямі a, b, c, d, що перетинаються в точці O, та прямі l, l_1, причому $l \parallel d$. При центральному проектуванні прямої l на пряму l_1 відносно точки O точки A, B та C переходять у точки A_1, B_1 та C_1 відповідно, а у точку D_1 не переходить жодна точка прямої l. Для зручності домовимось вважати, що прямі l та d перетинаються у *нескінченно віддаленій точці*[2] D та визначимо подвійне відношення чотирьох точок, одна з яких є нескінченно віддаленою, таким чином, аби рівність $(AB, CD) = (a, b; c, d)$ виконувалась і в цьому випадку.

Застосовуючи теорему синусів до трикутників AOC та BOC, дістанемо, що

$$\sin\angle(a, c) : \sin\angle(a, d) = AC : OC, \quad \sin\angle(b, c) : \sin\angle(b, d) = BC : OC,$$

а отже $(a, b; c, d) = \pm\frac{AC}{BC}$. Тому домовимось вважати, що для звичайних точок A, B, C та нескінченно віддаленої точки D, що належать одній прямій, подвійне відношення дорівнює $(AB, CD) = (AB, C\infty) = \pm\frac{AC}{BC}$, причому знак є від'ємним, якщо точка C лежить між A та B, і додатним, якщо ні.

Аналогічно можна поширити означення подвійного відношення (AB, CD) на четвірки точок, у яких нескінченно віддаленою є точка A, B або C. При цьому центральне проектування зберігає подвійне відношення чотирьох точок навіть у випадку, коли деякі з точок є нескінченно віддаленими.

Задача 2 (!). Довести, що для довільних трьох точок A, B, C, що лежать на одній прямій, та довільного дійсного числа k на цій прямій існує щонайбільше одна (звичайна або нескінченно віддалена) точка D, для якої $(AB, CD) = k$.

Розв'язання. Якщо усі точки A, B, C, D є звичайними, то подвійне відношення виражається через їх координати x_A, x_B, x_C, x_D таким чином: $(AB, CD) = \frac{(x_C - x_A)(x_D - x_B)}{(x_C - x_B)(x_D - x_A)}$. Цей вираз є дробово-лінійною функцією відносно координати x_D, а тому набуває всіх дійсних значень крім $\frac{x_C - x_A}{x_C - x_B}$ рівно в одній точці, а для нескінченно віддаленої точки

[2] Зупинимось на домовленостях про нескінченно віддалені точки більш детально. Будемо вважати, що на площині існує *нескінченно віддалена пряма*, яка складається лише з нескінченно віддалених точок, а кожна звичайна пряма містить єдину нескінченно віддалену точку, у якій перетинається з нескінченно віддаленою прямою. При цьому якщо дві звичайні прямі є паралельними, то їх нескінченно віддалені точки збігаються, а якщо прямі перетинаються у звичайній точці, то їх нескінченно віддалені точки є різними. На перший погляд ці домовленості є штучними та громіздкими, проте завдяки ним будь-які дві прямі на площині перетинаються в єдиній (можливо, нескінченно віддаленій) точці, а тому під час розв'язування задач можна використовувати точки перетину довільних прямих не турбуючись про випадки, коли деякі з цих прямих насправді є паралельними.

D як раз $(AB, CD) = (AB, C\infty) = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B}$. Випадок, коли одна з точок A, B, C є нескінченно віддаленою, розглядається аналогічно.

Зауваження. Оскільки вираз для обчислення подвійного відношення дорівнює 1 при $x_D = x_C$ та 0 при $x_D = x_A$, то для довільних чотирьох різних точок на прямій $(AB, CD) \neq 1$, $(AB, CD) \neq 0$.

Часто у задачах вимагається встановити, що певні прямі перетинаються в одній точці або певні точки лежать на одній прямій. Наступні дві задачі підказують, яким чином у цьому може допомогти подвійне відношення.

Задача 3 (!). Нехай для точок A, B, C, D прямої l та точок A_1, B_1, C_1, D_1 прямої l_1 має місце рівність $(AB, CD) = (A_1B_1, C_1D_1)$, а прямі AA_1, BB_1, CC_1, що з'єднують відповідні точки подвійних відношень, перетинаються в точці O. Довести, що пряма DD_1 також проходить через точку O.

Розв'язання. Нехай пряма OD перетинає пряму l_1 в точці D_2. Тоді $(A_1B_1, C_1D_2) \overset{O}{=} (AB, CD) = (A_1B_1, C_1D_1)$. Внаслідок задачі 2 звідси випливає, що точки D_1 та D_2 співпадають.

Задачу 3 особливо зручно застосовувати у випадку, коли дві відповідні точки подвійних відношень співпадають.

Задача 4 (!). Нехай прямі a, b, c, d перетинаються в точці O, а прямі a_1, b_1, c_1, d_1 — в точці O_1, причому $(a, b; c, d) = (a_1, b_1; c_1, d_1)$. Довести, що якщо точки перетину прямих a і a_1, b і b_1, c і c_1 належать прямій m, то точка перетину прямих d і d_1 також належить цій прямій.

Розв'язання. Позначимо A, B, C точки перетину прямих a і a_1, b і b_1, c і c_1, які належать прямій m. Нехай прямі d та d_1 перетинають пряму m у точках D та D_1 відповідно. Тоді $(AB, CD) = (a, b; c, d) = (a_1, b_1; c_1, d_1) = (AB, CD_1)$, а отже $D = D_1$ — точка перетину прямих d і d_1.

Задачу 4 особливо зручно застосовувати у випадку, коли дві відповідні прямі з даних подвійних відношень співпадають.

Розглянувши основні теоретичні відомості про подвійне відношення, ми нарешті можемо застосувати знання "на практиці".

Задача 5. (теорема Паппа) Нехай на прямих m та n лежать точки A, B, C та A_1, B_1, C_1, X — точка перетину прямих AB_1 та A_1B, Y — точка перетину AC_1 та A_1C, Z — точка перетину BC_1 та B_1C. Довести, що $X - Y - Z$ — одна пряма.

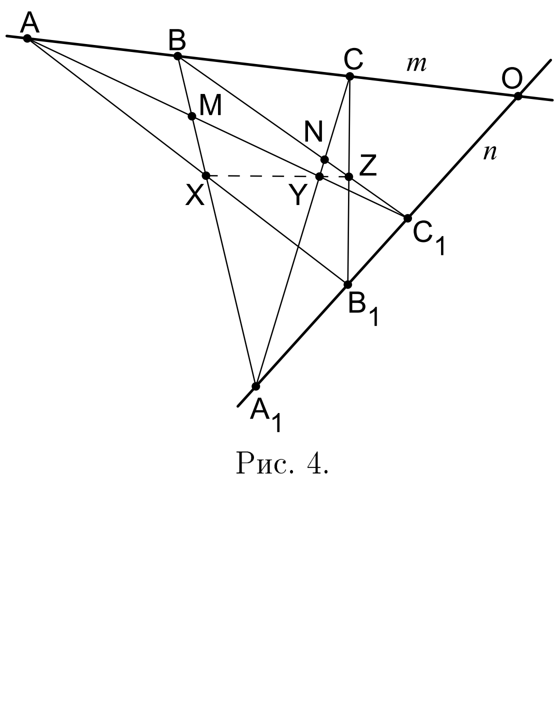

Рис. 4.

Розв'язання. Нехай M — точка перетину AC_1 та A_1B, а N — точка перетину A_1C та C_1B, а O — точка перетину m та n (рис. 4). Доведемо, що

$$(BC_1, ZN) = (BM, XA_1),$$

тоді оскільки прямі C_1M та NA_1 перетинаються в точці Y, то внаслідок задачі 3 і пряма ZX пройде через цю точку.

Використовуючи центральне проектування, дістанемо $(OC_1, B_1A_1) \overset{A}{=} (BM, XA_1)$ та $(OC_1, B_1A_1) \overset{C}{=} (BC_1, ZN)$. Звідси $(BC_1, ZN) = (BM, XA_1)$, що й треба було довести.

Задача 6. (теорема Дезарга) Прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в точці O, X, Y, Z — точки перетину прямих AB та A_1B_1, BC та B_1C_1, AC та A_1C_1 відповідно. Довести, що $X - Y - Z$ — одна пряма.

Розв'язання. Нехай пряма XY перетинає прямі OA, OB та OC у точках K, M та N (рис. 5). Тоді $(OK, AA_1) \overset{X}{=} (OM, BB_1)$, $(OM, BB_1) \overset{Y}{=} (ON, CC_1)$ а отже $(OK, AA_1) = (ON, CC_1)$. Тому внаслідок задачі 3 пряма MN проходить через точку перетину прямих BC та B_1C_1, тобто через точку Z.

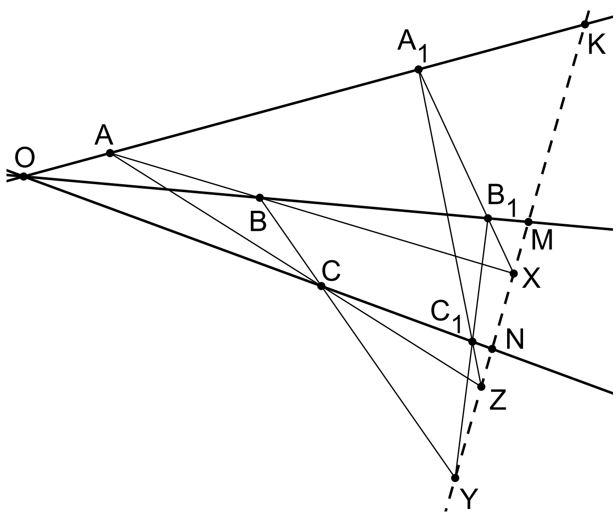

Рис. 5.

Задача 7. Прямі m та n перетинаються в точці A, а X — довільна точка, яка лежить всередині одного з утворених цими прямими кутів. Пряма, що проходить через точку X, перетинає прямі m та n в точках B та C відповідно. З точок B та C опустили перпендикуляри на пряму AX довжини p та q. Довести, що для будь-якої прямої BC маємо $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \text{const}$.

Розв'язання. Проведемо через точку X перпендикуляр до прямої AX, який перетинає пряму m в точці K, а пряму n в точці L (рис. 6). Нехай B_1, B_2 та C_1, C_2 — такі точки на прямих m та n відповідно, що прямі B_1C_1 та B_2C_2 перетинаються в точці X. Позначимо D_1, D_2 проекції точок B_1, B_2 та E_1, E_2 проекції точок C_1, C_2 на пряму XA. У задачі вимагається довести, що

$$\frac{1}{B_1D_1} + \frac{1}{C_1E_1} = \frac{1}{B_2D_2} + \frac{1}{C_2E_2}.$$

Добре відомо, що якщо провести через точку перетину діагоналей трапеції з основами p та q паралельний основам відрізок з кінцями на бічних сторонах, то він має довжину $\frac{2pq}{p+q} = 2/(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$ (доведіть!). Отже, достатньо показати, що для трапецій $B_1D_1C_1E_1$ та $B_2D_2C_2E_2$ зазначений відрізок є спільним.

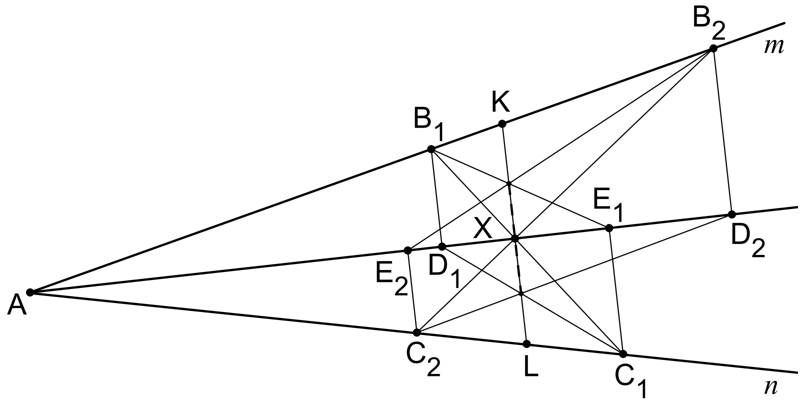

Рис. 6.

Маємо $(AK, B_1B_2) \overset{X}{=} (AL, C_1C_2) = (AX, E_1E_2)$, тому згідно задачі 3 прямі KX, B_1E_1 та B_2E_2 перетинаються в одній точці. Аналогічно прямі LX, C_1D_1 та C_2D_2 перетинаються в одній точці. Таким чином, пряма KL перетинає бічні сторони трапецій $B_1D_1C_1E_1$ та $B_2D_2C_2E_2$ у тих самих точках, що і завершує доведення.

Задача 8. В трикутнику ABC на стороні BC відмітили K_1 — точку дотику з вписаним колом, L_1 — основу бісектриси та T_1 — точку дотику із зовнівписаним колом. Аналогічно визначили точки K_2, L_2, T_2 для сторони AC. Довести, що K_1K_2, L_1L_2 та T_1T_2 перетинаються в одній точці або паралельні.

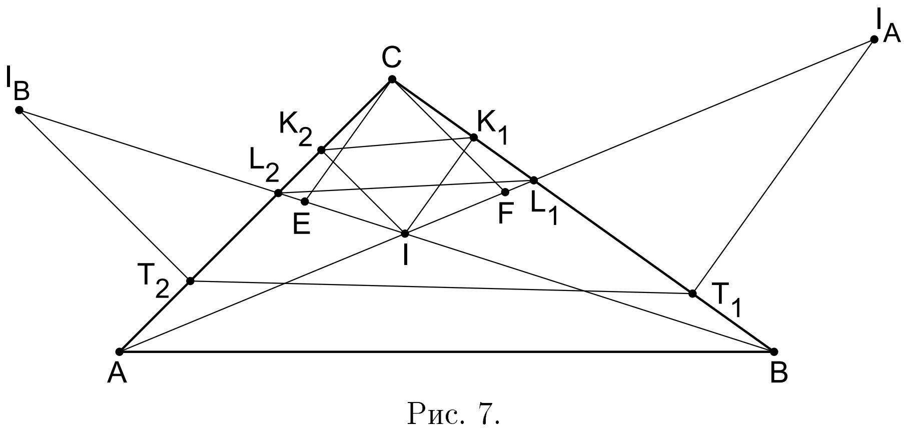

Рис. 7.

Розв'язання. Внаслідок задачі 3 достатньо встановити, що виконується рівність $(K_1L_1, T_1C) = (K_2L_2, T_2C)$.

Проведемо перпендикуляри до прямих AC і BC в точці A, які перетинають бісектриси кутів B та A у точках E та F відповідно. Нехай I, I_A, I_B — центри вписаного та зовнівписаних кіл трикутника ABC. Тоді C, K_1, T_1 — проекції F, I, I_A на BC, а C, K_2, T_2 — проекції E, I, I_B на AC (рис. 7).

Оскільки промені CL_1 та CL_2, CI_A та CI_B, CE та CF є симетричними відносно бісектриси CI, то

$$(IL_1, I_AF) = (CI, CL_1; CI_A, CF) = (CI, CL_2; CI_B, CE) = (IL_2, I_BE).$$

Але подвійне відношення чотирьох точок зберігається при паралельному проектуванні, тому $(K_1L_1, T_1C) = (K_2L_2, T_2C)$, що і завершує доведення.

Як бачимо, для знаходження рівних подвійних відношень корисно проводити додаткові прямі, зокрема може виявитися зручним перехід від подвійних відношень точок до подвійних відношень прямих.

Задача 9. Довести, що симедіана AS трикутника ABC (тобто пряма, симетрична медіані AM відносно бісектриси AL) ділить сторону BC у відношенні $\frac{BS}{SC} = (\frac{AB}{CA})^2$.

Розв'язання. Прямі AM та AS, AB та AC симетричні відносно AL, тому

$$(BC, ML) = (AB, AC; AM, AL) = (AC, AB; AS, AL) = (CB, SL).$$

Враховуючи, що

$$(BC, ML) = \frac{BM}{MC} : \frac{BL}{LC} = \frac{AC}{AB}, \quad (CB, SL) = \frac{CS}{SB} : \frac{CL}{LB} = \frac{CS}{SB} : \frac{AC}{AB},$$

звідси дістаємо $\frac{CS}{SB} : \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AB}$, тобто $\frac{CS}{SB} = (\frac{AC}{AB})^2$.

Гармонічна четвірка точок та гармонічна четвірка прямих

Означення 4. Четвірка точок A, B, C, D, які лежать на одній прямій, називається гармонічною[3], якщо $(AB, CD) = -1$.

Означення 5. Четвірка попарно непаралельних прямих a, b, c, d називається гармонічною, якщо $(a, b; c, d) = -1$.

Задача 10 (!). (лема про чотирьохвершинник) У чотирикутнику $ABCD$ прямі BC і AD перетинаються у точці F, прямі AB і CD — у точці E, BD та EF — у точці N, AC та EF — у точці M. Довести, що $(EF, MN) = -1$.

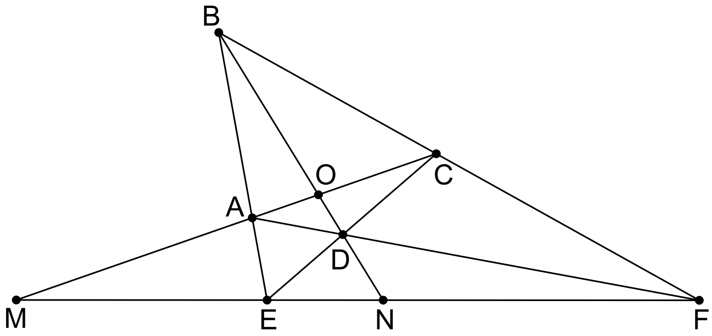

Рис. 8.

Розв'язання. Нехай прямі AC і BD перетинаються у точці O (рис. 8). Тоді

$$(EF, MN) \stackrel{D}{=} (CA, MO), \quad (EF, MN) \stackrel{B}{=} (AC, MO).$$

Але $(CA, MO) = \frac{1}{(AC, MO)}$. Тому $(EF, MN) = \frac{1}{(EF, MN)}$, звідки $(EF, MN) = \pm 1$. Але для чотирьох різних точок на прямій завжди $(EF, MN) \neq 1$, тому $(EF, MN) = -1$.

Зауваження. Інколи корисно мати на увазі, що в умовах задачі 10 ще декілька четвірок точок є гармонічними. Справді,

[3] Назва походить від однієї з властивостей такої четвірки точок: якщо точки A, B, C, D лежать на одній прямій та $(AB, CD) = -1$, то відрізок AB дорівнює середньому гармонічному відрізків AC та AD.

$$(CA, MO) \stackrel{D}{=} (EF, MN) = -1, \quad (BD, ON) \stackrel{A}{=} (EF, MN) = -1.$$

Задача 11 (!). Довести, що $(AB, AC; AM, BC) = -1$, де AM — медіана трикутника ABC.

Розв'язання. Проведемо через точку A пряму $m \parallel BC$. Тоді

$$(AB, AC; AM, BC) = (AB, AC; AM, m) \stackrel{A}{=} (BC, M\infty) = -\frac{BM}{CM} = -1.$$

Зауваження. Обернене твердження також вірне: якщо чевіана AM трикутника ABC є такою, що $(AB, AC; AM, BC) = -1$, то AM — медіана (доведіть!).

Задача 12. (лема про трапецію) Нехай M та P — середини основ BC та AD трапеції $ABCD$, E — точка перетину бічних сторін, а H — точка перетину діагоналей. Довести, що $H - P - E - M$ — одна пряма.

Розв'язання. Нехай EH перетинає BC в точці N, тоді згідно задачі 10 маємо $(BC, NT) = -1$, де T — нескінченно віддалена точка перетину основ трапеції. Але для точки M також $(BC, MT) = -\frac{BM}{MC} = -1$, тому точки M та N збігаються. Аналогічно точка перетину EH та AD збігається з точкою P.

Задача 13. Довести, що у трикутнику ABC сторони AB та AC, симедіана AS та дотична до описаного кола в точці A є гармонічною четвіркою прямих.

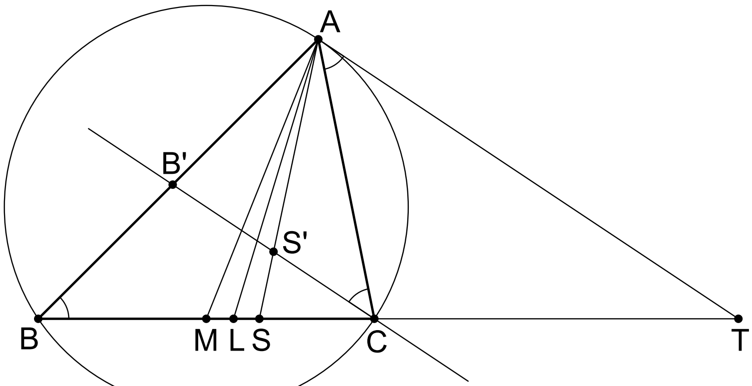

Рис. 9.

Розв'язання. I спосіб. Нехай дотична до описаного кола трикутника ABC у точці A перетинає продовження сторони BC у точці T (рис. 9). Трикутники ABT та CAT подібні, а тому $\frac{AB}{CA} = \frac{BT}{AT} = \frac{AT}{CT}$, звідки $\frac{BT}{CT} = \frac{BT}{AT} \cdot \frac{AT}{CT} = (\frac{AB}{CA})^2$. Але згідно задачі 9 також маємо $\frac{BS}{SC} = (\frac{AB}{CA})^2$, тому $(AB, AC; AS, AT) = (BC, ST) = -\frac{BS}{SC} : \frac{BT}{CT} = -1$.

II спосіб. Проведемо через точку C пряму, паралельну дотичній до кола. Нехай ця пряма перетинає AB та AS у точках B' та S'. Тоді трикутники ABC та ACB' подібні, причому $\angle BAM = \angle CAS'$, бо прямі AM та AS симетричні відносно бісектриси AL. Звідси S' — середина $B'C$ та $(AB, AC; AS, AT) = (B'C, S'\infty) = -1$.

Задача 14 (!). Нехай точки A, B, C, D лежать на одній прямій, причому точка C лежить між A та B, а точка E не належить цій прямій. Довести, що якщо виконуються деякі два з тверджень

а) $(AB, CD) = -1$, б) EC — бісектриса кута $\angle AEB$, в) $\angle CED = 90°$, то виконуються усі три твердження.

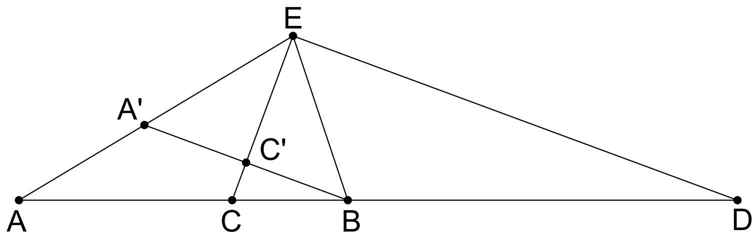

Рис. 10.

Розв'язання. Проведемо через точку B пряму, паралельну прямій ED (рис. 10). Нехай ця пряма перетинає EA та EC у точках A' та C', тоді $(AB, CD) \stackrel{E}{=} (A'B, C'\infty)$. Внаслідок задачі 11 та зауваження до неї твердження а) рівносильне до того, що EC' є медіаною трикутника $A'EB$. Але твердження б) означає, що EC' є бісектрисою, а твердження в) — що EC' є висотою цього трикутника, тому з довільних двох тверджень випливає, що трикутник $A'EB$ рівнобедрений, а тоді виконуються усі три твердження.

Зауваження. Якщо виконуються умови б) та в), то ED — зовнішня бісектриса кута $\angle AEB$. Таким чином, сторони кута разом з його бісектрисою та зовнішньою бісектрисою є гармонічною четвіркою прямих. Цей факт можна вивести і безпосередньо з означення подвійного відношення, бо за властивістю бісектриси та зовнішньої бісектриси $\frac{AC}{CB} = \frac{AE}{EB}$, $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EB}$.

Задача 15. Дано чотирикутник $ABCD$. Нехай P — точка перетину AC та BD, E — точка перетину AB та CD, F — точка перетину BC та AD, X — проекція точки P на пряму EF (рис. 11). Довести, що $\angle AXB = \angle CXD$.

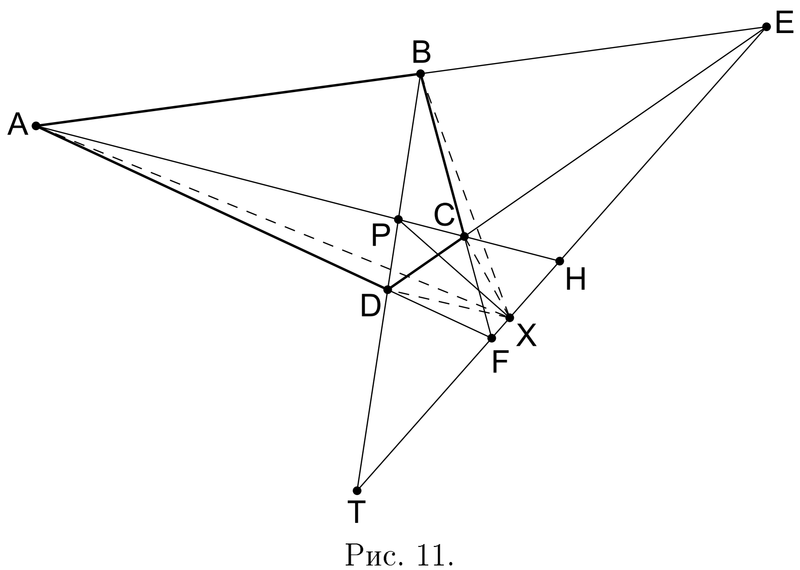

Рис. 11.

Розв'язання. Нехай EF перетинає пряму BD у точці T, а пряму AC у точці H. Тоді $\angle PXT = 90°$, а згідно зауваження до задачі 10 маємо $(BD, PT) = -1$. Отже, згідно задачі 14 пряма XP — бісектриса кута $\angle BXD$. Аналогічно $(HP, AC) = -1$ та

$\angle PXH = 90°$, а отже XP — бісектриса кута $\angle AXC$. Тому $\angle AXB = \angle CXD$, бо ці кути симетричні відносно XP.

Задача 16. Про чотирикутник $ABCD$ відомо, що $\angle BAD = \angle BCD = 90°$. Нехай точка B_1 симетрична до B відносно AC, точка A_1 симетрична до A відносно BD, P — точка перетину AC та B_1D, а T — точка перетину BD та CA_1 (рис. 12). Довести, що $\angle TPC = 90°$.

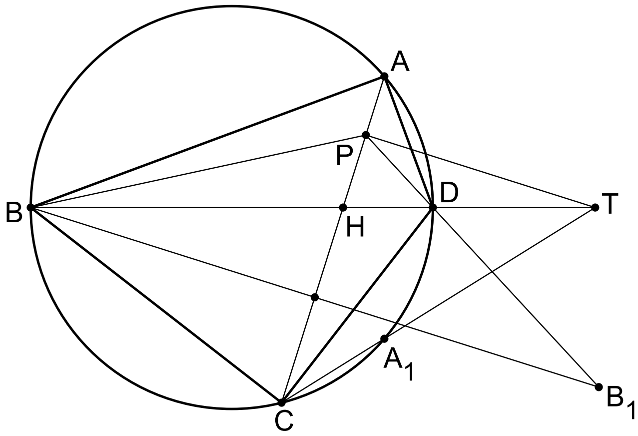

Рис. 12.

Розв'язання. Оскільки $\angle BA_1D = \angle BAD = \angle BCD = 90°$, то точка A_1 належить описаному колу чотирикутника $ABCD$. Далі, CD — бісектриса кута $\angle ACA_1$, оскільки $\smile AD = \smile A_1D$. Тоді згідно задачі 14 дістаємо $(DB, HT) = -1$, де H — точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$. Таким чином, $(PD, PB; PH, PT) = -1$. Але PH ділить відрізок BB_1 навпіл. Тому PT має перетнути пряму BB_1 у нескінченно віддаленій точці, тобто $PT \parallel BB_1$, а отже $PT \perp PC$.

Задача 17. В трикутнику ABC на стороні BC відмітили H_1 — основу висоти, K_1 — точку дотику з вписаним колом та L_1 — основу бісектриси. Аналогічно визначили точки H_2, K_2, L_2 для сторони AC. Довести, що H_1H_2, K_1K_2 та L_1L_2 перетинаються в одній точці або паралельні.

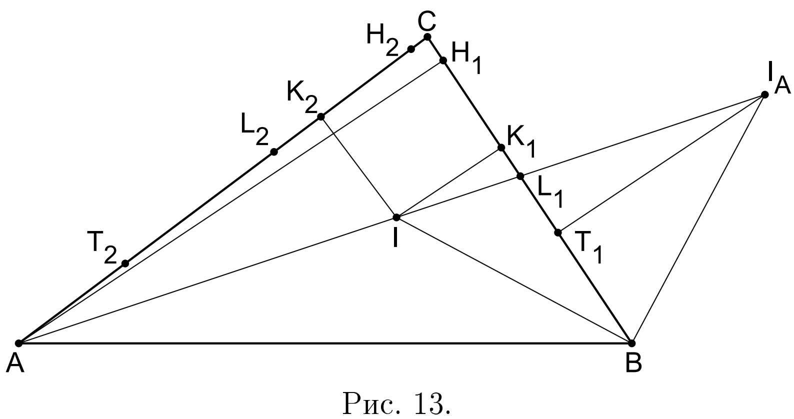

Рис. 13.

Розв'язання. Нехай T_1, T_2 — точку дотику відповідних зовнівписаних кіл зі сторонами BC та AC (рис. 13), тоді $(T_1K_1, L_1H_1) = (I_AI, L_1A) = -1$ (остання рівність випливає з того, що BI_A та BI — зовнішня та внутрішня бісектриси кута $\angle ABL_1$).

Аналогічно $(T_2K_2, L_2H_2) = -1$. Згідно задачі 8 прямі K_1K_2, L_1L_2 і T_1T_2 перетинаються в одній (можливо, нескінченно віддаленій) точці, тому і пряма H_1H_2 пройде через цю точку.

Задача 18. Прямі m та n проходять через вершину A трикутнику ABC та утворюють однакові кути зі сторонами AC та AB. Бісектриса кута B перетинає пряму m у точці M, а бісектриса кута C перетинає пряму n у точці N. Прямі BN та CM перетинаються в точці P. Довести, що точка P належить бісектрисі кута $\angle BAC$.

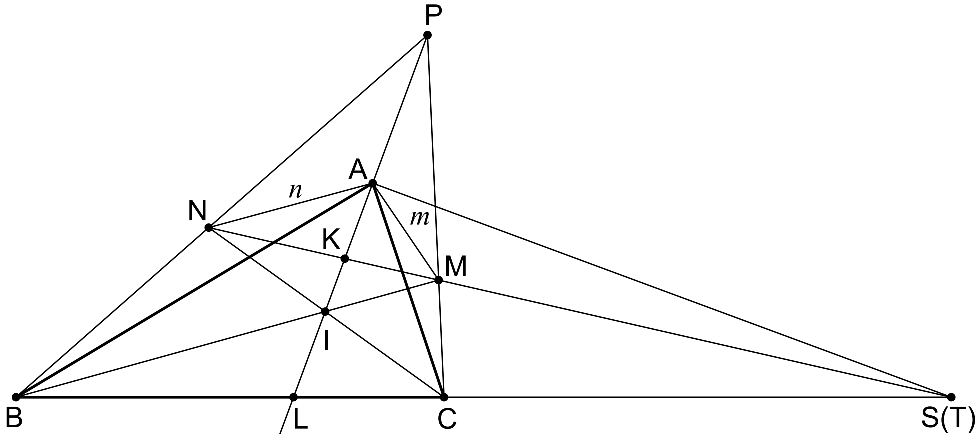

Рис. 14.

Розв'язання. Нехай бісектриса кута $\angle BAC$ перетинає пряму MN у точці K та пряму BC у точці L, а зовнішня бісектриса кута $\angle BAC$ перетинає BC у точці T та MN у точці S (рис. 14). Припустимо, що $S \neq T$. Згідно задачі 14 маємо $(MN, KS) = -1$ та $(BC, LT) = -1$. Але KL, NC, BM перетинаються в точці I — інцентрі трикутника ABC, тому внаслідок задачі 3 пряма ST також проходить через точку I. Отже, пряма ST проходить через точки A та I, тобто є одночасно бісектрисою кута $\angle BAC$ та зовнішньою бісектрисою кута $\angle BAC$, суперечність. Таким чином, $S = T$,

$$(NM, KS) = (BC, LT) = (BC, LS) = -1,$$

а тому внаслідок задачі 3 пряма KL, яка є бісектрисою кута $\angle BAC$, проходить через точку перетину прямих BN та MC.

Як бачимо, бісектриса та зовнішня бісектриса кута — ще дві прямі, проведення яких часто допомагає помітити у геометричній конфігурації шукану гармонічну четвірку точок.

Задача 19. Нехай AL — бісектриса трикутника ABC, вписане коло трикутника ABL дотикається до сторін AL, BC, BA у точках D, E, F відповідно, а зовнівписане коло ALC, яке дотикається до сторони LC, дотикається до продовження AL у точці H. Довести, що точки E, F, H лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай зовнішня бісектриса кута $\angle BAC$ перетинає бісектрису кута $\angle BLA$ у точці N (рис. 15). Очевидно, що пряма LN також проходить через центри вписаного та зовнівписаного кіл O_1 та O_2. Оскільки $\angle O_1AL = \angle LAO_2$ та $\angle LAN = 90°$, то $(NL, O_1O_2) = -1$. Звідси при проектуванні на AL дістаємо $(AL, DH) = -1$. Оскільки внаслідок теореми Чеви прямі DB, AE, LF перетинаються в одні точці, то за лемою про чотирьохвершинник EF перетинає AL в такій точці H_1, що $(AL, DH_1) = -1$. Але $(AL, DH) = -1$. Тому $H = H_1$, а отже точки E, F, H лежать на одній прямій.

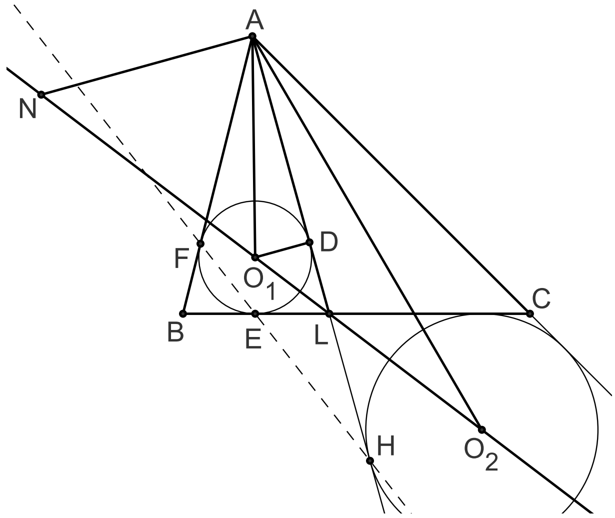

Рис. 15.

Задача 20. Нехай у трикутнику ABC точка H — основа висоти, проведеної з вершини AH, а K та L — основи внутрішньої та зовнішньої бісектрис кута C відповідно. Відновити трикутник за точками H, K, L.

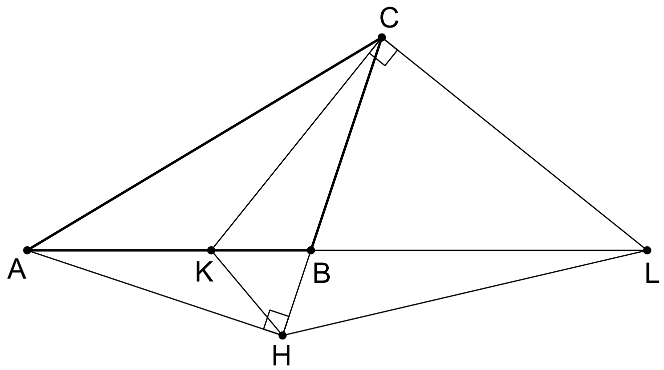

Рис. 16.

Розв'язання.

Аналіз. Оскільки $(AB, KL) = -1$ та $\angle AHB = 90°$, то $\angle KHB = \angle BHL$ (рис. 16).

Побудова. Проведемо бісектрису кута $\angle KHL$, вона перетне KP в точці B. Коло з діаметром KL перетне BH в точці C, а перпендикуляр до BC у точці H перетне пряму KL в точці A. Слід помітити, що таких трикутників буде два — в залежності від вибору точки перетину HB з колом.

Задача 21. В трикутнику ABC на стороні AB відмітили точку D. Нехай ω_1 та ω_2 — вписані кола трикутників ACD та BCD, а Ω_1 та Ω_2 — відповідно зовнівписані кола цих трикутників, які дотикаються до AB. Довести, що спільні зовнішні дотичні до ω_1 та ω_2, Ω_1 та Ω_2 перетинаються на прямій AB.

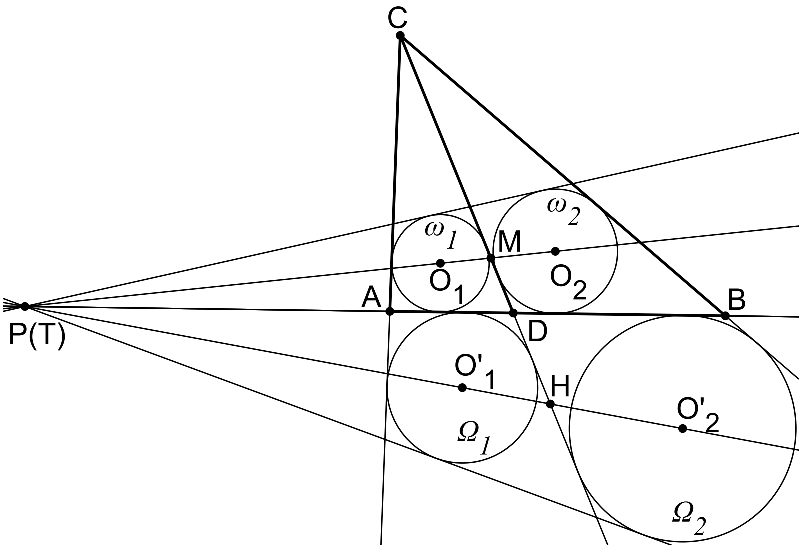

Рис. 17.

Розв'язання. Нехай O_1, O_2 — центри кіл ω_1, ω_2, а O_1', O_2' — центри кіл Ω_1, Ω_2, пряма CD перетинає прямі O_1O_2 та $O_1'O_2'$ у точках M та H, спільна дотична до кіл ω_1 та ω_2 перетинає пряму AB в точці P, а спільна дотична до кіл Ω_1 та Ω_2 перетинає пряму AB в точці T (рис. 17). Зрозуміло, що тоді $P - O_1 - M - O_2$ — одна пряма, яка є бісектрисою кута, утвореного спільними зовнішніми дотичними до кіл ω_1, ω_2. Аналогічно $T - O_1' - H - O_2'$ — одна пряма.

Оскільки DO_1, DO_2 — бісектриса та зовнішня бісектриса кута $\angle PDM$, то $(PM, O_1O_2) = -1$. Аналогічно $(TH, O_1'O_2') = -1$. Але прямі O_1O_1', O_2O_2' та MH перетинаються в точці C. Отже,

$$(CP, CM; CO_1, CO_2) = -1, \quad (CT, CM; CO_1, CO_2) = (CT, CH; CO_1', CO_2') - 1,$$

звідки прямі CP та CT збігаються, тобто $P = T$.

Задача 22. Навколо чотирикутника $ABCD$ описане коло з центром O, діагоналі чотирикутника перетинаються в точці P. Кола, описані навколо трикутників ABP та CDP, вдруге перетинаються в точці S, а сторони AD і BC перетинаються в точці K. Довести, що точки O, S, K лежать на одній прямій (рис. 18).

Розв'язання. Оскільки радикальні вісі трьох кіл завжди перетинаються в одній точці, то AB, CD і PS перетинаються в одній точці, позначимо її E.

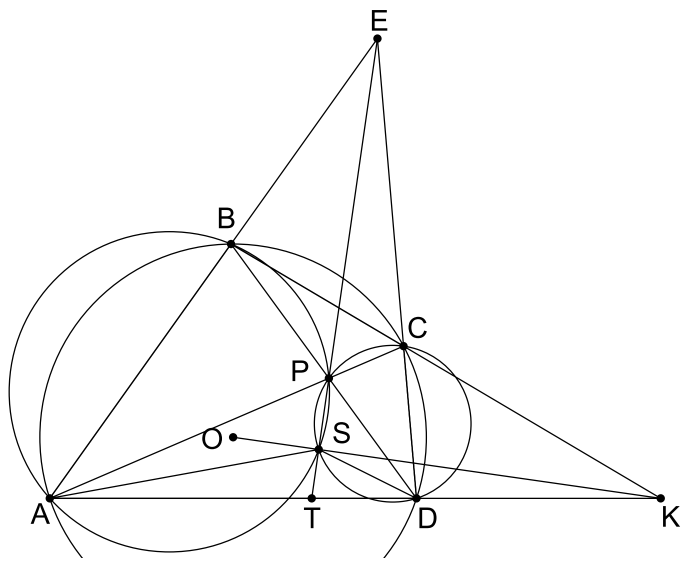

Рис. 18.

Покладемо $\angle ABD = \angle ACD = \alpha$, тоді $\angle PSD = \angle PSA = \pi - \alpha$, а тому пряма PS — бісектриса кута $\angle ASD$. Нехай PS перетинає AD в точці T. Згідно леми про чотирьохвершинник $(AD, TK) = -1$. Але ST — бісектриса кута $\angle ASD$, тому KS — зовнішня бісектриса цього кута. Далі, $\angle ASD = AOD = 2\alpha$, тому точки A, O, S, D лежать на одному колі, причому O — середина дуги $\smile ASD$. Таким чином, OS — зовнішня бісектриса кута $\angle ASD$ та $O - S - K$ — одна пряма.

Наостанок зауважимо, що подвійне відношення можна визначити і для чотирьох різних точок, що лежать на одному колі, проте властивості такого відношення та їх застосування до розв'язування задач — привід для окремої ґрунтовної розмови.

Література.

1. А. Адлер, *Теория геометрических построений.* Л., Учпедгиз, 1940. 232 с.

2. Ж.С. Адамар, *Элементарная геометрия. Планиметрия.* М., ОГИЗ, 1948. 608 с.

3. С.Л. Грейтцер, Г.С.М. Коксетер, *Новые встречи с геометрией.* М., Наука, 1978. 224 с.

4. Р. Курант, Г. Роббинс, *Что такое математика?* М.: МЦНМО, 2001. 568 с.

5. А.А. Заславский, *Геометрические преобразования.* М.: МЦНМО, 2004. 86 с.

5. В. Ясінський, *Використання гармонічних четвірок точок і прямих при розв'язуванні планіметричних задач на математичних олімпіадах.* Математика в школі, №1-2, 2010.