

Пильно придивляючись до медіани трикутника

Григорій Філіпповський¹

Здавалося б, стільки написано про медіану — відрізок, який з'єднує вершину трикутника із серединою протилежної сторони. Властивості медіани добре вивчені, ними активно користуються при розв'язуванні різноманітних задач. І все-таки не буде зайвим (особливо у 7–8 класах) зібрати разом факти, властивості, формули, які дозволяють вважати медіану однією з чудових ліній трикутника.

Властивість 1. Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці (цю точку називають центр мас або центроїд трикутника), яка ділить кожну з медіан у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини (рис. 1).

Доведення цієї властивості можна знайти практично у будь-якому підручнику з геометрії для 8 класу.

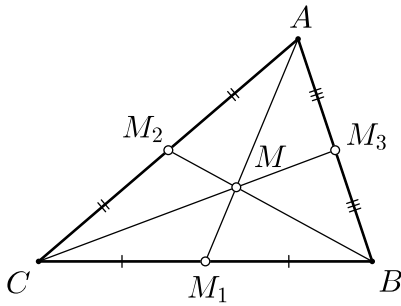


рис.1

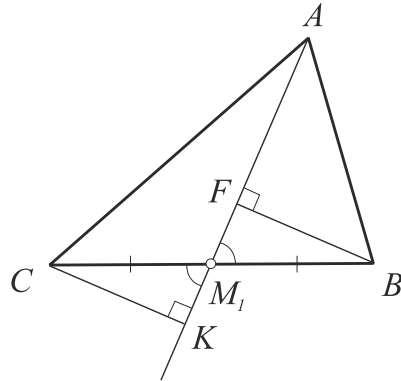


рис.2

Властивість 2. Вершини B та C трикутника ABC рівновіддалені від прямої, яка містить медіану AM_1 .

Доведення. Нехай $BF \perp AM_1$ та $CK \perp AM_1$ (рис. 2). Тоді трикутники BFM_1 та CKM_1 рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $BF = CK$.

Властивість 3. Кожна точка медіани AM_1 є серединою паралельного до BC відрізка, кінці якого лежать на AB та AC .

Доведення. Нехай через точку N , яка належить медіані AM_1 , проведено відрізок $EF \parallel BC$ (рис. 3). Покажемо, що $EN = NF$. З подібності трикутників AEN та ABM_1 , AFN та ACM_1 випливає, що $\frac{EN}{BM_1} = \frac{AN}{AM_1}$, $\frac{FN}{CM_1} = \frac{AN}{AM_1}$. Праві частини цих рівностей однакові, тому $\frac{EN}{BM_1} = \frac{FN}{CM_1}$. А оскільки $BM_1 = CM_1$, то $EN = NF$.

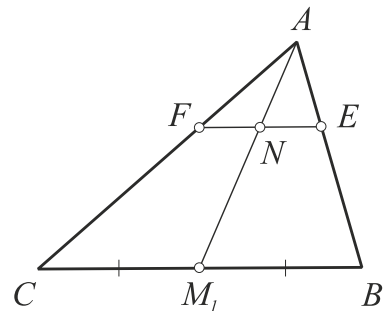


рис.3

Властивість 4. Медіана AM_1 не менша за висоту AH_1 та бісектрису AL_1 .

Доведення. Якщо трикутник ABC рівнобедрений з основою BC , то точки H_1, L_1, M_1 збігаються. Далі будемо вважати, що $AC > AB$.

¹Русанівський ліцей, м. Київ.

Якщо показати, що L_1 лежить між M_1 та H_1 , то звідси випливатиме, що довжина похилої AM_1 більша за довжину похилої AL_1 , яка в свою чергу більша за довжину перпендикуляра AH_1 (рис. 4).

Нехай продовження бісектриси AL_1 перетинає описане коло трикутника ABC в точці W . Оскільки $\angle BAW = \angle CAW$, то W — середина дуги $\smile BC$, а тому $M_1W \perp BC$. Але $AH_1 \perp BC$, отже $AH_1 \parallel BC$. Таким чином, відрізок AW міститься між паралельними прямими AH_1 та M_1W , тому його точка перетину з BC лежить між точками M_1 та H_1 , що і вимагалось.

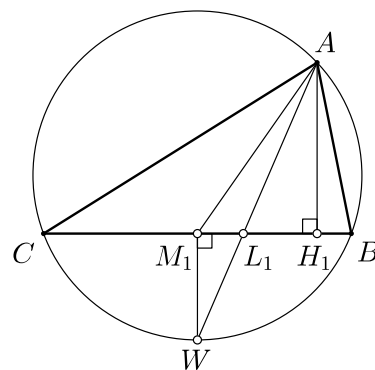


рис.4

Властивість 5. Медіана утворює з меншою бічною стороною більший кут.

Доведення. Нехай $c < b$. Покажемо, що $\alpha > \beta$ (рис. 5). Подвоїмо медіану AM_1 , тобто відкладемо на продовженні AM_1 за точку M_1 відрізок $M_1D = AM_1$. Цей прийом (“подвоєння медіани”) дуже часто виявляється корисним. Одержимо паралелограм $ABDC$, у якому $BD = AC = b$ та $\angle ADB = \angle CAD = \beta$. Тоді у трикутнику ABD , зрозуміло, $\alpha > \beta$ (проти більшої сторони лежить більший кут).

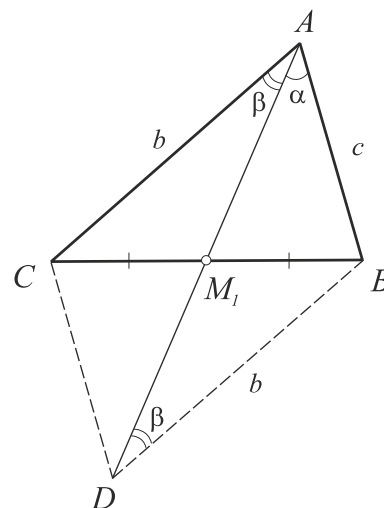


рис.5

Властивість 6. Медіана AM_1 менша за півсуму сторін AB та AC .

Доведення. Знову використаємо рис. 5. Для трикутника ABD застосуємо нерівність трикутника: $2AM_1 < b + c$, або $AM_1 < \frac{b+c}{2}$.

Властивість 7. (формула довжини медіани)

$$AM_1^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Доведення. Знову подвоїмо медіану та одержимо паралелограм $ABDC$ (рис. 5). Оскільки сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін, то $(2AM_1)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$, звідки $AM_1^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$.

Властивість 8. До більшої сторони трикутника проводиться менша медіана.

Доведення. I спосіб. Нехай $BC > AC$. Тоді вершини A C лежать по одну сторону від серединного перпендикуляра до AB (рис. 6). Тоді медіана CM , а отже і точка перетину медіан M , теж лежать по цю сторону від серединного перпендикуляра. Звідси $AM < BM$, тобто $\frac{2}{3}AM_1 < \frac{2}{3}BM_2$, а отже $AM_1 < BM_2$.

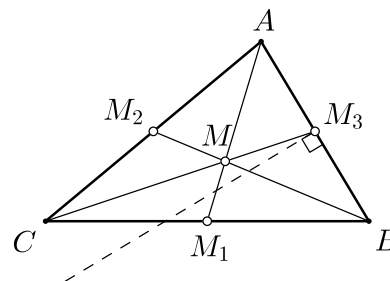


рис.6

II спосіб. Нехай $a = BC > b = AC$. Тоді за формулою довжини медіани

$$AM_1^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} < \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} = BM_2^2.$$

Властивість 9. Медіана ділить трикутник на дві рівновеликі частини.

Доведення. Основи трикутників ABM_1 та ACM_1 рівні ($BM_1 = CM_1$), а висота AH_1 спільна (рис. 7). Оскільки площа трикутника дорівнює половині добутку його основи на висоту, то $S_{ABM_1} = S_{ACM_1}$.

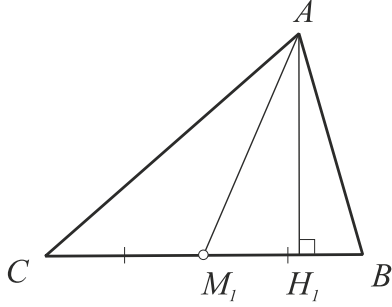


рис.7

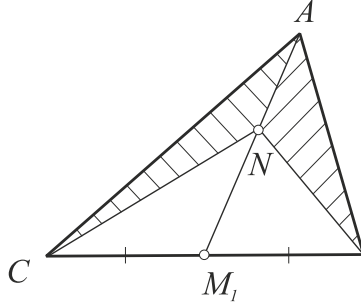


рис.8

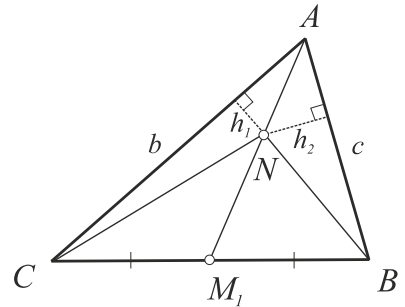


рис.9

Властивість 10. Медіана AM_1 є геометричним місцем точок N всередині трикутника ABC , для яких трикутники ABN та ACN рівновеликі (рис. 8).

Доведення. Оскільки $S_{ABM_1} = S_{ACM_1}$ та $S_{NBM_1} = S_{NCM_1}$ (за властивістю 9), то $S_{ABN} = S_{ACN}$ тоді й лише тоді, коли $S_{ABN} + S_{NBM_1} = \frac{1}{2}S_{ABC} = S_{ABM_1}$. Зрозуміло, що рівність $S_{ABN} + S_{NBM_1} = S_{ABM_1}$ рівносильна тому, що N належить AM_1 .

Властивість 11. Відстані від будь-якої точки на медіані AM_1 до бічних сторін обернено пропорційні довжинам цих сторін.

Доведення. Оскільки $S_{ABN} = S_{ACN}$ (властивість 10), то $\frac{1}{2}bh_1 = \frac{1}{2}ch_2$ (рис. 9). Звідси $\frac{h_1}{h_2} = \frac{c}{b}$.

Властивість 12. Через будь-яку точку N на медіані AM_1 провели промені BN та CN . Нехай E — точка перетину CN з AB та F — точка перетину BN з AC . Тоді $EF \parallel BC$.

Доведення. Проведемо через вершину A пряму $k \parallel BC$. Нехай k перетинає пряму BF в точці T та пряму CE в точці Q (рис. 10). З подібності пар трикутників TNA та BNM_1 , QNA та CNM_1 випливає, що $TA = AQ$. З подібності трикутників TFA та BFC випливає, що $\frac{TA}{BC} = \frac{AF}{FC}$, а з подібності трикутників QEA та BEC — що $\frac{AQ}{BC} = \frac{AE}{EB}$. Звідси $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB}$. А це означає, що $EF \parallel BC$.

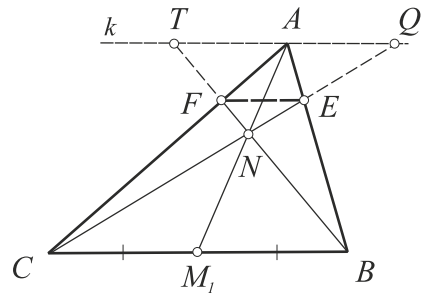


рис.10

Властивість 13. В умовах властивості 12 трикутники ABF та ACE рівновеликі.

Доведення. Звернемося до рис. 10. Трикутники FBC та EBC мають спільну основу, а оскільки $EF \parallel BC$ (властивість 12), то висоти цих трикутників теж рівні. Тому $S_{FBC} = S_{EBC}$, звідки $S_{ABF} = S_{ACE}$.

Властивість 14. Якщо відкласти на стороні BC довільні відрізки $BE = CF$ та провести через E і F відповідно прямі $e \parallel AB$ та $f \parallel AC$ (рис. 11), то e та f перетнуться на медіані AM_1 .

Доведення. Нехай N — точка перетину прямих e та f . Проведемо через точку N відрізок $TQ \parallel BC$ з кінцями на бічних сторонах трикутника ABC . Тоді $TN = CF$ та $QN = BE$, оскільки $TNFC$ та $QNEB$ — паралелограми. Отже, $TN = NQ$ і точка N належить медіані AM_1 за властивістю, оберненою до властивості 3 (доведіть її самостійно).

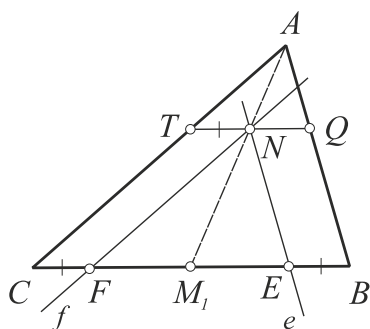


рис.11

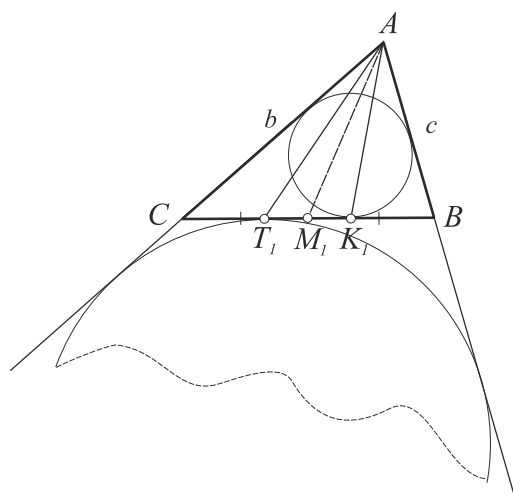


рис.12

Властивість 15. Відрізок AM_1 є медіаною трикутника AK_1T_1 , де K_1, T_1 — відповідно точки дотику вписаного та зовнішнього кіл трикутника ABC зі стороною BC (рис. 12).

Доведення. Неважко показати, що $BK_1 = p - b$ та $CT_1 = p - b$, де p — півпериметр трикутника ABC (покажіть!). Оскільки $BM_1 = CM_1$, то $M_1K_1 = M_1T_1$, тобто AM_1 є медіаною трикутника AK_1T_1 .

Властивість 16. Відрізок AM_1 є медіаною трикутника ADH , де H — ортоцентр (точка перетину висот) трикутника ABC , а D — точка, діаметрально протилежна вершині A .

Доведення. Оскільки $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ (вписані кути, які спираються на діаметр AD), то $BD \perp AB$, $CD \perp AC$ (рис. 13). Але $CH \perp AB$, $BH \perp AC$, тому $BD \parallel CH$, $CD \parallel BH$. Отже, $BDCN$ паралелограм, та M_1 — спільна середина BC та DH .

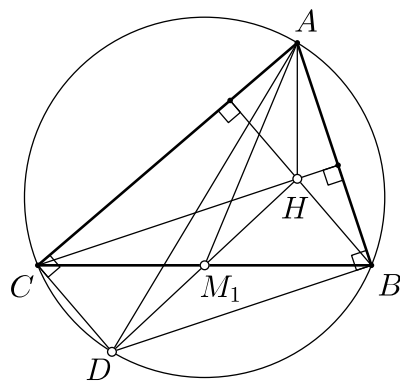


рис.13

Властивість 17. (формула) Проекція медіани AM_1 на сторону BC знаходиться за формулою $M_1H_1 = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}$.

Доведення. При $b = c$ формула є очевидною. Без обмеження загальності далі будемо вважати, що $b > c$. Зрозуміло, що тоді проекцією AM_1 на BC є відрізок M_1H_1 (рис. 14). Маємо $M_1H_1 = M_1B - H_1B = \frac{a}{2} - c \cos B$. За теоремою косинусів

$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Тому

$$M_1H_1 = \frac{a}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

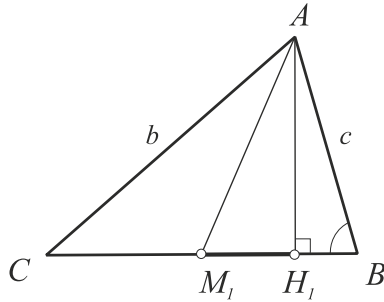


рис.14

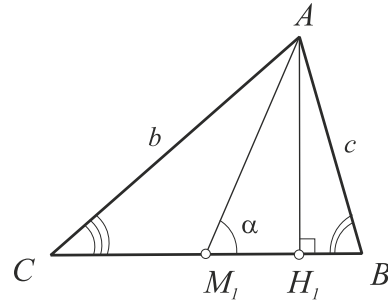


рис.15

Властивість 18. (формули) Медіана AM_1 утворює зі стороною BC кут α , для якого

а) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{|b^2 - c^2|}{4S}$, де S — площа трикутника ABC ;

б) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} |\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B|$.

Доведення. Якщо $b = c$, то $\alpha = 90^\circ$, $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ та обидві формули правильні. Надалі будемо вважати, що $b > c$.

а) З трикутника AM_1H_1 (рис. 15) маємо

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{M_1H_1}{AH_1} = \frac{b^2 - c^2}{2a \cdot AH_1} = \frac{b^2 - c^2}{4S}.$$

б) З трикутників ACH_1 та ABH_1 дістаємо, що

$$\operatorname{ctg} C = \frac{CH_1}{AH_1} = \frac{\frac{a}{2} + M_1H_1}{AH_1}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{BH_1}{AH_1} = \frac{\frac{a}{2} - M_1H_1}{AH_1}.$$

Тоді $\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B = \frac{2M_1H_1}{AH_1} = 2\operatorname{ctg} \alpha$, звідки випливає формула б).

Властивість 19. На AH_1 як на діаметрі побудовано коло ω , яке перетинає AB та AC у точках E і F відповідно. Дотичні до ω у точках E і F перетинаються в точці Q (рис. 16). Тоді Q належить прямій, яка містить медіану AM_1 .

Доведення. Проведемо висоти BH_2 та CH_3 трикутника ABC , які перетинаються в ортоцентрі H (рис. 17). Очевидно, що точки A, H_2, H, H_3 лежать на колі s з діаметром AH . Кола ω і s гомотетичні з центром гомотетії A . Якщо показати, що дотичні до s в точках H_2 і H_3 перетинаються на медіані AM_1 , то це буде означати, що дотичні до ω у точках E і F перетинаються на прямій, яка містить медіану AM_1 . З'єднаємо H_2 та H_3 з M_1 . Маємо $\angle 1 = \angle 2$, оскільки $H_2M_1 = BM_1$ (медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи). Але $\angle 2 = \angle 3 = 90^\circ - C$ (з трикутників BH_2C та AH_1C). Тоді $\angle 1 = \angle 3$, звідки H_2M_1 — дотична до s . Аналогічно H_3M_1 — дотична до

s . Таким чином, дотичні до s в точках H_2 і H_3 перетинаються на медіані AM_1 . Отже, і дотичні до ω у точках E і F перетнуться на прямій, яка містить медіану AM_1 .

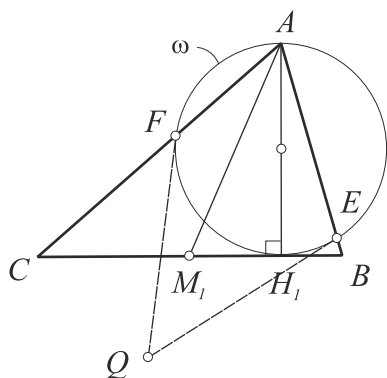


рис.16

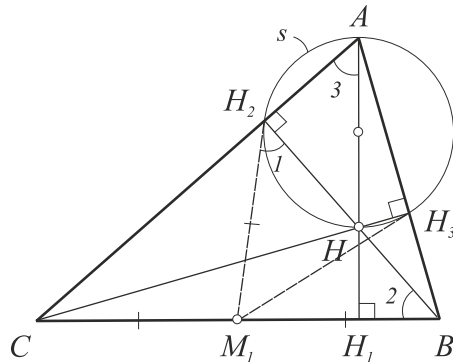


рис.17

Властивість 20. Навколо трикутника ABC описане коло ω . Дотичні до ω у вершинах B і C перетинаються в точці Q . Нехай $QE \perp AB$ і $QF \perp AC$. Тоді $EF \perp AM_1$.

Доведення. Відмітимо на променях AC , AB такі точки K, L , що пряма KL проходить через точку Q , причому $\angle AKL = B$ (рис. 18). Тоді зрозуміло, що $\angle ALK = C$. Помітимо, що $\angle KCQ = B$ та $\angle LBQ = C$ (кут між дотичною і хордою дорівнює вписаному куту). Тому трикутники KQC та LQB рівнобедрені. Враховуючи, що $BQ = CQ$ як дотичні, дістаємо, що $KQ = CQ = BQ = LQ$, тобто Q — середина KL .

Таким чином, AM_1 , AQ — медіани у подібних трикутниках ABC та AKL , звідки $\angle CAM_1 = \angle LAQ$, тобто $\angle FAM_1 = \angle EAQ$. Але $\angle EAQ = \angle EFQ$, оскільки чотирикутник $AEQF$ є вписаним у коло з діаметром AQ . Тому

$$\angle EFA + \angle FAM_1 = \angle EFA + \angle EFQ = 90^\circ,$$

а отже $EF \perp AM_1$.

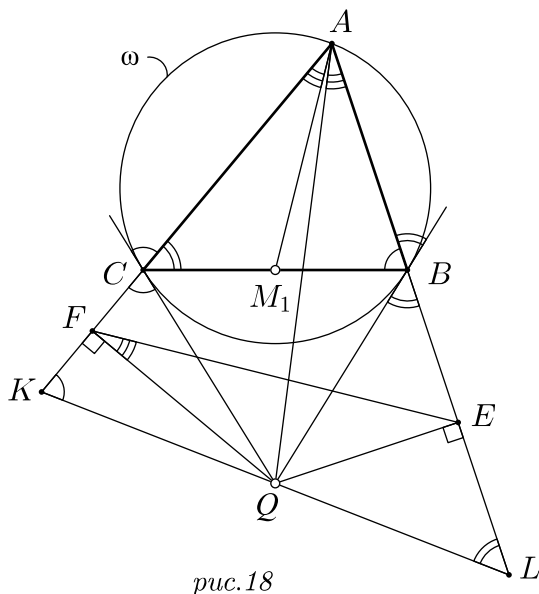


рис.18

Ще низку властивостей медіани трикутника пропонуємо довести самостійно.

Властивість 21. Якщо пряма проходить через центроїд трикутника та ділить його площу навпіл, то вона є медіаною цього трикутника.

Властивість 22. З медіан трикутника завжди можна скласти трикутник.

Властивість 23. Медіану AM_1 подвоїли — одержали точку D . Тоді точка D лежить на колі, описаному навколо трикутника BHC , де H — ортоцентр трикутника ABC .

Властивість 24. Медіани трикутника ділять його на шість рівновеликих частин.

Властивість 25. (формула) Має місце векторна формула для медіани AM_1 :

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Властивість 26. (формула) З центра описаного кола трикутника ABC провели перпендикуляр ON до медіани AM_1 . Тоді $NB^2 + NC^2 = 2NA^2$.

Властивість 27. Медіану AM_1 продовжили до перетину з описаним колом трикутника ABC в точці Q . Тоді $AQ \geq BC$.

Властивість 28. Нехай K_1 і T_1 — відповідно точки дотику вписаного та зовнішнього кіл трикутника ABC зі стороною BC . Через кожну з цих точок провели пряму, яка ділить площу трикутника ABC навпіл. Тоді ці прямі перетинаються на медіані AM_1 .

Властивість 29. У трикутник ABC вписали коло з центром I , яке дотикається до BC , AC та AB у точках K_1 , K_2 , K_3 відповідно. Тоді прямі K_2K_3 та IK_1 перетинаються на медіані AM_1 .

Властивість 30. Нехай BH_2 і CH_3 — висоти трикутника ABC з ортоцентром H , T — точка перетину прямих H_2H_3 та BC . Тоді $TH \perp AM_1$.