МЦШ №№ 11-12, 2008

Григорій ФІЛІППОВСЬКИЙ

Леонардо Фібоначчі і гомотетія

У 1170 р. в італійському місті Піза в сім'ї писаря Боначчо (що означає «доброзичливий») народився син Леонардо. Йому призначено було стати видатним математиком Леонардо Пізанським або Леонардо Фібоначчі (син Боначчо).

У юнацькі роки Фібоначчі навчався арифметиці та алгебрі в Алжирі. Потім почалися торгові подорожі до Єгипту, Сирії, Візантії, Сицилії, де він суттєво розширив свої математичні пізнання. А в 1202 р. написав «Книгу абака», в якій систематизував усе найкраще в грецькій і арабській математиці, а також додав свої задачі, прийоми, методи.

У «Книзі абака», що складається з 459 сторінок, Фібоначчі показав прийоми множення, дії з дробами, ввів дробову риску: $\frac{a}{b}$. Він вирішив низку задач на визначення проби сплавів. Розв'язав задачі на правило «товариства» (про те, як розділити суму пропорційно часткам учасників). Він переконливо показав, що індійська система числення набагато зручніша за римську: 4321 — у індусів, MMMMCCCXXI — у римлян. В алгебраїчній частині книжки Фібоначчі вирішує лінійні і квадратні рівняння, задачі з радикалами. Він також є автором знаменитої **задачі про кроликів**, коли від кожної пари через місяць з'являється нова пара. Отримуємо ряд, у якому кожен елемент, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21 ... Цей ряд називається *рядом Фібоначчі*. Багато важливих, корисних властивостей має *ряд Фібоначчі*, широким є його застосування. Фібоначчі також є учасником і переможцем першого публічного математичного турніру, під час якого він блискуче розв'язав усі завдання, запропоновані супротивником.

У 1220 р. було завершено другу книжку — «Практика геометрії». В ній Фібоначчі наводить доведення важливих теорем, часто пропонуючи свої, оригінальні доведення. Ось, наприклад, його авторське доведення теореми про медіани (мал. 1): $\frac{AM_1}{MM_1}=\frac{a}{\frac{a}{2}}=\frac{2}{1}$.

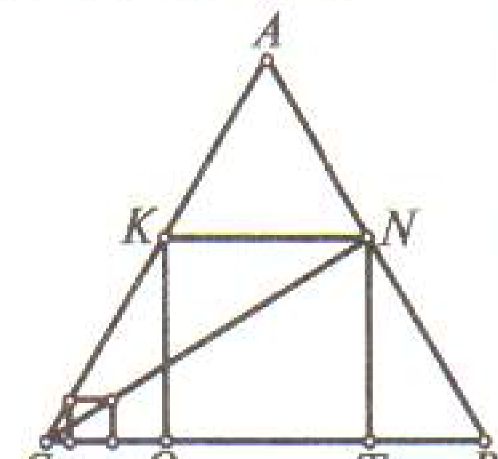
Тут дуже важливо зазначити, що Леонардо прагне не лише і не стільки вирішити окремо взяту задачу, а й **створити метод розв'язування цілої низки задач, об'єднаних спільною ідеєю**.

Мал. 1

Багато задач із книжок Фібоначчі входили згодом до всіх європейських підручників. Не випадково кажуть, що аж до XVIII ст. Європа вивчала математику за працями Фібоначчі. Ми ж докладніше зупинимося на задачі з «Практики геометрії».

Задача Леонардо Фібоначчі. У рівносторонній трикутник впишіть квадрат у такий спосіб, щоб одна зі сторін лежала на основі трикутника.

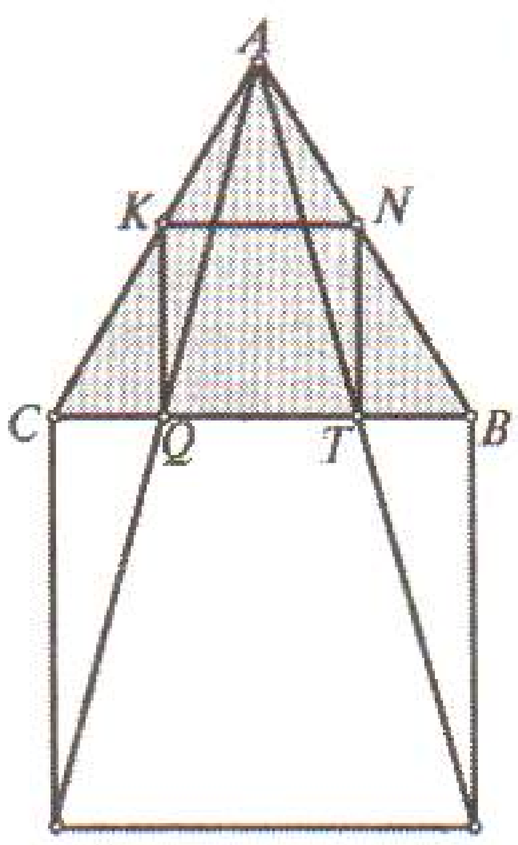
Розв'язання. Спочатку впишемо в трикутник маленький квадрат (мал. 2). Потім за допомогою гомотетії «розширимо» його до шуканого квадрата $KNTQ$.



Мал. 2

Зауваження 1. Задача має аналогічне розв'язання не лише для рівностороннього, а й для довільного трикутника.

Зауваження 2. Гомотетія дає змогу розв'язати задачу Фібоначчі і дещо по-іншому, побудувавши спочатку квадрат на стороні BC у зовнішній бік (мал. 3). Такий метод (*метод гомотетії*) виявився достатньо ефективним при розв'язуванні цілої низки задач. Добірку таких задач, які невимушено, красиво розв'язуються за допомогою гомотетії, пропонуємо вашій увазі.



Мал. 3

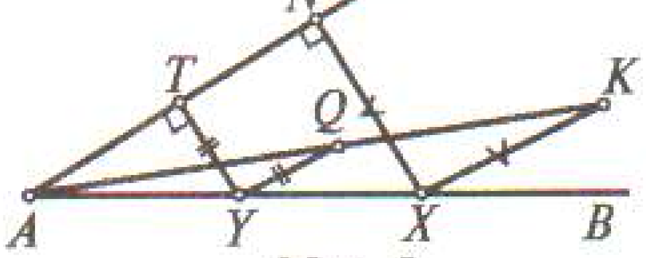
Нагадаємо лише, що ***гомотетія*** — слово грецького походження, і означає «однаково розміщені». Гомотетія задається своїм центром і коефіцієнтом гомотетії. Головним у гомотетії є той факт, що центр гомотетії та, відповідно, гомотетичні точки належать одній прямій.

До того ж гомотетія — це окремий випадок подібності.

Задача 1. Усередині кута BAC «кинуто» точку K (мал. 4). Знайти на стороні AB таку точку X, що $KX = XN$, де $XN \perp AC$.

Розв'язання. З'єднаємо A і K (мал. 5). З довіль-

Мал. 4

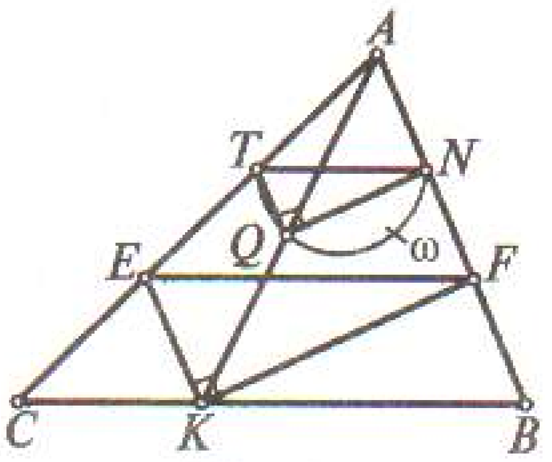


Мал. 5

ної точки $T \in AC$ відновлюємо до AC перпендикуляр, який перетне AB в точці Y. Засічка з Y, розхилом TY в перетині з AK дає точку Q. $QY = YT$, а фігури QYT і KXN є гомотетичними.

Задача 2. K — точка на стороні BC трикутника ABC. Побудувати $EF \parallel BC$ ($E \in AC$ и $F \in AB$), щоб відрізок EF було видно з точки K під прямим кутом.

Розв'язання. Проведемо відрізок $TN \parallel BC$, де $T \in AC$ і $N \in AB$ (мал. 6). На TN як на діаметрі побудуємо півколо ω, яке перетне відрізок AK у точці Q. Оскільки $\angle TQN = 90°$ (вписаний спирається на діаметр), то залишається побудувати ΔKEF, гомотетичний ΔQTN, в якому $\angle EKF = 90°$ і $EF \parallel BC$.



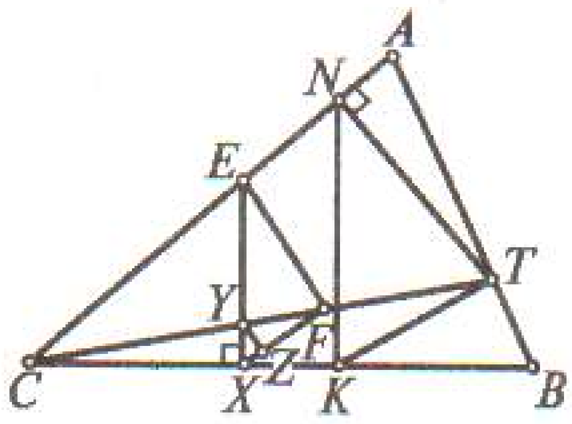
Мал. 6

Задача 3. У даний ΔABC впишіть ΔKNT, сторони якого перпендикулярні до сторін ΔABC.

Розв'язання. Будуємо маленький ΔXYZ, у якому $XY \perp BC$; $YZ \perp AC$ і $XZ \perp AB$ (мал. 7). Потім, застосувавши гомотетію з центром X, збільшуємо цей трикутник до ΔXEF. Гомотетія з центром у вершині C перетворює ΔXEF у шуканий ΔKNT.

Задача 4. У колі проведено радіуси OA і OB. Побудувати хорду NT, яка ділиться цими радіусами на три рівні частини.

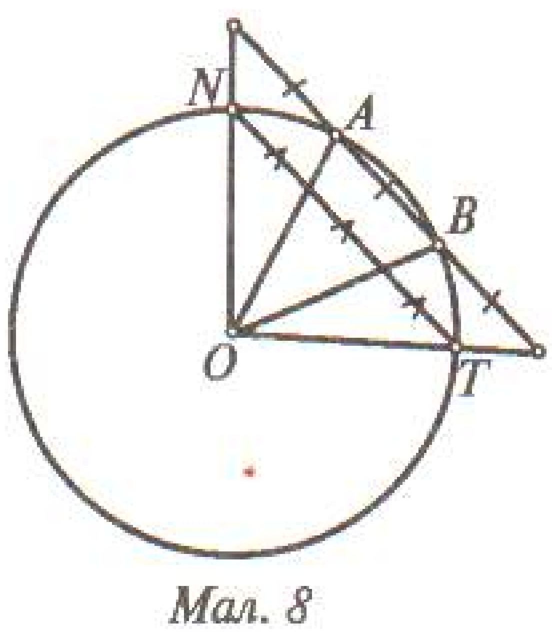
Розв'язання. Якщо дивитися на мал. 8, додаткові коментарі до цієї задачі здаються зайвими.



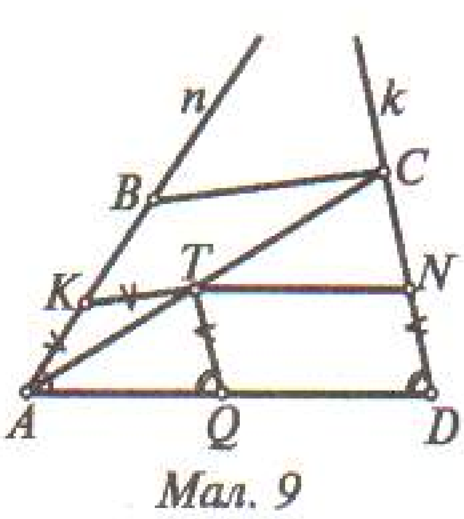
Мал. 7

Задача 5. Побудувати чотирикутник $ABCD$ за його кутами A і D та стороною AD, якщо відомо, що $AB = BC = CD$.

Розв'язання. Будуємо відрізок AD. Потім під кутами, що дорівнюють кутам A і D, проводимо відповідні промені n і k з точок A і D (мал. 9). На них відкладаємо довільно $AK = DN$. З точки N проводимо паралельну пряму до AD. А з точки K робимо на ній засічку розхилом циркуля, що дорівнює AK — отримуємо точку T. Проводимо $TQ \parallel ND$. Оскільки чотирикутники $AKTQ$ та $ABCD$ гомотетичні, то подальша побудова є очевидною.



Мал. 8



Мал. 9

Задача 6. На стороні AB квадрата $ABEF$ побудовано у зовнішню сторону прямокутний ΔABC (мал. 10). CE і CF перетинають AB в точках X та Y. Доведіть, що $XY = \sqrt{BX \times AY}$.

Розв'язання. Нехай промені CA і CB перетинають пряму EF в точках N і T відповідно. Очевидно, трикутники ACB і NCT гомотетичні з центром гомотетії у точці C та коефіцієнтом

$$k = \frac{CA}{CN} = \frac{AY}{NF} = \frac{XY}{EF} = \frac{BX}{ET}. \qquad (1)$$

Тоді

$$BX \times AY = k^2 \times NF \times ET. \qquad (2)$$

З подібності ΔANF і ΔTBE маємо: $\frac{NF}{BE} = \frac{AF}{ET}$, де $AF = BE = a$ — сторона квадрата. Або $NF \times ET = a^2$.

Підставимо в (2) й отримаємо:

$$BX \times AY = k^2 \times a^2. \qquad (3)$$

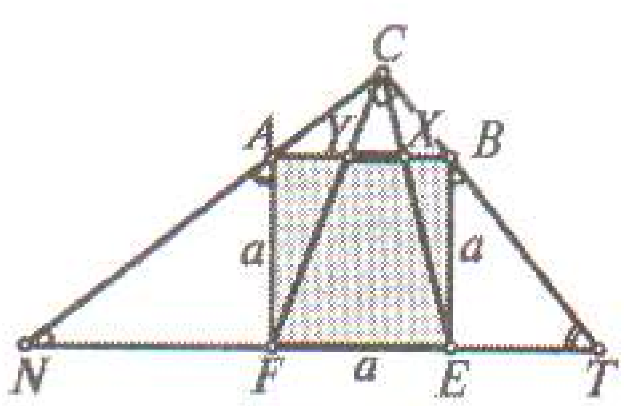
Але з (1) $\frac{XY}{EF} = \frac{XY}{a} = k$, звідки

$$XY^2 = k^2 a^2. \qquad (4)$$

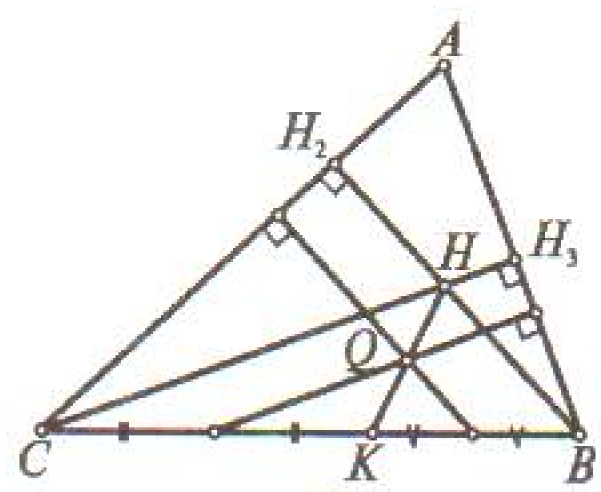
Порівнявши (3) і (4), одержимо необхідне:

$$XY = \sqrt{BX \times AY}.$$

Задача 7. На стороні BC трикутника ABC взято точку K. Із середини BK проведено перпендикуляр до AC, а з середини CK — перпендикуляр до AB. Ці перпендикуляри перетинаються в точці Q (мал. 11). При якому положенні точки K довжина відрізка QK буде найменшою? (*Всеукраїнські олімпіади, 10 клас*).



Мал. 10



Мал. 11

Розв'язання. При гомотетії з центром у точці K та коефіцієнтом $k = 2$ проведені перпендикуляри перейдуть у висоти BH_2 і CH_3 трикутника ABC. А точка Q — в ортоцентр H. При цьому $QK = \frac{1}{2} HK$. Очевидно, довжина відрізка HK буде найменшою, коли точка K збіжиться з основою висоти, яку проведено з вершини A.

Декілька задач, що успішно розв'язуються за допомогою гомотетії, пропонуємо для самостійного розв'язування.

Задача 8. Доведіть, що трикутники з відповідно паралельними сторонами є гомотетичними.

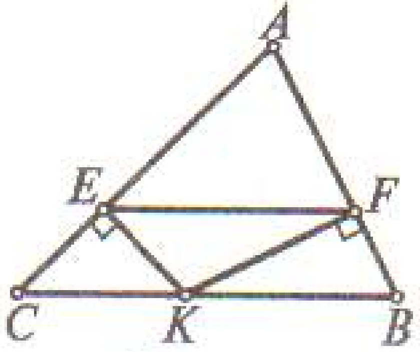
Задача 9. Впишіть у трикутник прямокутник із заданим відношенням сторін.

Задача 10. Знайдіть на стороні BC трикутника ABC точку K — таку, що $EF \parallel BC$, де $KE \perp AC$ і $KF \perp AB$ (мал. 12).

КЕРІВНИКАМ МАТЕМАТИЧНИХ ГУРТКІВ

Задача 11. У даний ΔABC впишіть трикутник, сторони якого паралельні до сторін іншого даного ΔKNT.

Задача 12. У прямокутний ΔABC впишіть рівносторонній трикутник зі стороною, паралельною гіпотенузі AB.



Мал. 12

Задача 13. На сторонах AC і AB трикутника ABC знайдіть, відповідно, точки E і F — такі, що $CE = EF = FB$.

Задача 14. Побудувати ΔABC за наступними елементами: $a + b$; $a + c$; A.