Ізогоналі. Задачі для знайомства

Г. Філіпповський[1]

Нехай дано кут $\angle CAB$ і бісектрису l цього кута (рис. 1). Промені n та q, які виходять з вершини A і утворюють рівні кути з бісектрисою l, називають *ізогоналями*. Очевидно, що ізогоналі утворюють рівні кути також зі сторонами кута $\angle CAB$, тобто $\angle 1 = \angle 2$.

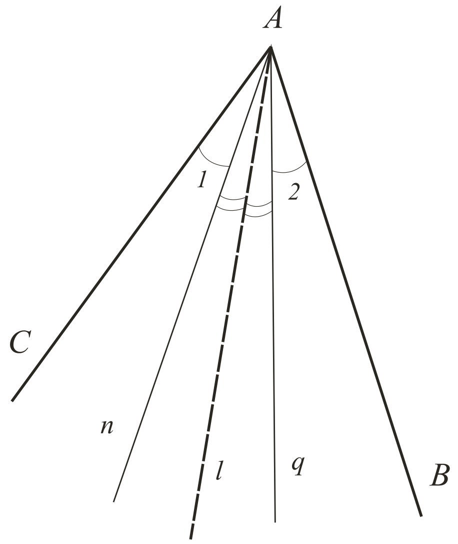

рис.1

В даній статті мова піде про нескладні задачі з ізогоналями. Саме з ними в першу чергу учні 7-9 класів зустрінуться під час спецкурсів, олімпіад, математичних змагань. Більш "серйозні" задачі, пов'язані з ізогоналями, у яких використовуються спеціальні теореми, а також задачі про симедіану, ми залишимо за межами нашої розмови.

Отже, розпочнемо знайомство із задачами, в яких основними діючими особами будуть ізогоналі.

Задача 1. Навколо трикутника ABC описано коло ω з центром O. Доведіть, що радіус AO та висота AH_1 — ізогоналі (рис. 2).

Доведення. З'єднаємо точки C і O. Тоді $\angle 1 = \angle 3$, бо $AO = CO = R$. Оскільки $\angle AOC = 2B$ як центральний кут, то $\angle 1 = \angle 3 = 90^\circ - B$. Але з трикутника ABH_1 також $\angle 2 = 90^\circ - B$, тому $\angle 1 = \angle 2$.

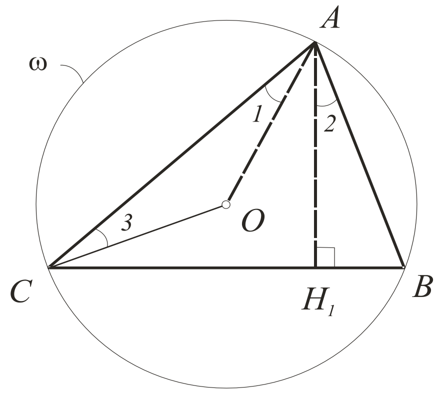

рис.2

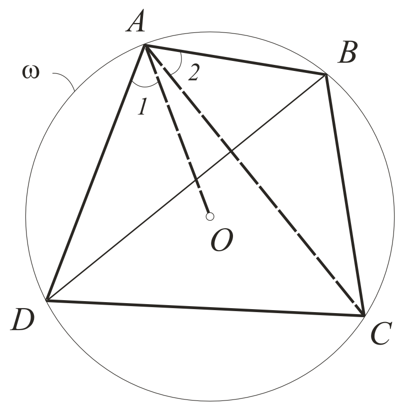

рис.3

Задача 2. Навколо чотирикутника $ABCD$ описано коло ω з центром O. Відомо, що AO та AC — ізогоналі, тобто $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3). Доведіть, що діагоналі AC та BD перпендикулярні.

Доведення. Згідно із задачею 1 промінь AC містить висоту трикутника ABD, проведену з вершини A. Тому $AC \perp BD$.

[1]Русанівський ліцей, м. Київ.

Задача 3. Нехай AM — медіана трикутника ABC та $\angle 1 = 90^\circ - B$ (рис. 4). Знайдіть величину кута $\angle BAC$.

Розв'язання. Проведемо висоту AH_1, тоді на рис. 4 маємо $\angle 2 = 90^\circ - B = \angle 1$. Згідно із задачею 1 пряма AM містить центр O кола, описаного навколо трикутника ABC. Але й серединний перпендикуляр t до сторони BC містить точку O. Отже, $M = O$ та BC — діаметр описаного кола трикутника ABC. Тоді $\angle BAC = 90^\circ$ як вписаний кут, що спирається на діаметр.

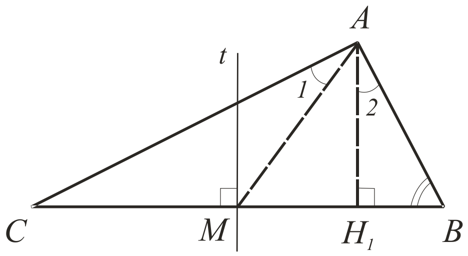

рис.4

Задача 4. Нехай AH_1 — висота трикутника ABC, AD — діаметр кола ω, описаного навколо трикутника ABC, $DN \perp BC$ (рис. 5). Доведіть, що $CN = BH_1$.

Доведення. Продовжимо AH_1 до перетину з ω в точці K. Оскільки AD і AK — ізогоналі ($\angle 1 = \angle 2$), то $\smile CD = \smile BK$. Тоді $CD = BK$. Але $\angle 3 = \angle 4$ як вписані кути, що спираються на рівні дуги $\smile BD = \smile DK + \smile BK = \smile DK + \smile CD = \smile CK$. Тоді $\triangle CND = \triangle BH_1K$ за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $CN = BH_1$.

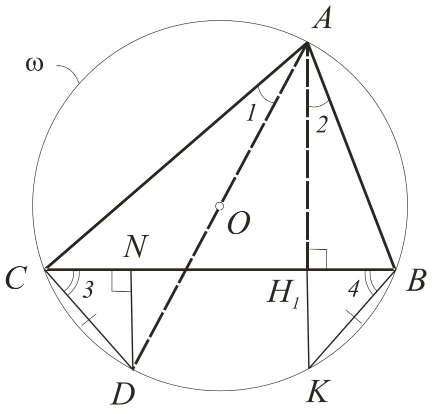

рис.5

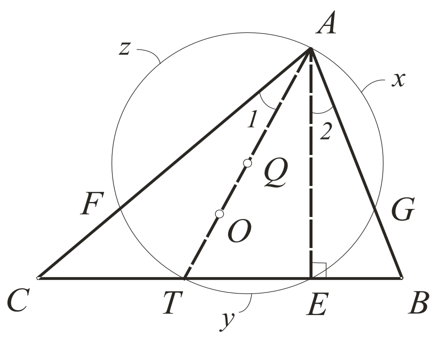

рис.6

Задача 5. *(О. Карлюченко)* Промінь AO, де O — центр описаного кола трикутника ABC, перетинає сторону BC у точці T. На відрізку AT як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає відрізки BT, AC та AB у точках E, F та G відповідно (рис. 6). Доведіть, що $\smile AF = \smile AG + \smile ET$, або $\smile z = \smile x + \smile y$.

Доведення. З'єднаємо точки A та E. Оскільки $\angle AET = 90^\circ$ (вписаний, спирається на діаметр), то AE — висота трикутника ABC та $\angle 1 = \angle 2$, тобто AO та AE — ізогоналі. Отже, $\smile FT = \smile GE$. Оскільки $\smile AFT = \smile AGT = 180^\circ$, то

$$\smile z = 180^\circ - \smile FT = 180^\circ - \smile GE = \smile x + \smile y.$$

Задача 6. Нехай точка I — інцентр (точка перетину бісектрис) трикутника ABC, $IK = r$ — перпендикуляр до BC, AL — бісектриса трикутника ABC. Доведіть, що IL та IK — ізогоналі в трикутнику BIC (рис. 7).

Доведення. Покажемо, що $\angle 1 = \angle 2$. Справді, $\angle 1 = \frac{A}{2} + \frac{C}{2}$ як зовнішній кут трикутника AIC, а з трикутника BIK дістаємо $\angle 2 = 90^\circ - \frac{B}{2}$. Але $90^\circ - \frac{B}{2} = \frac{A+C}{2}$. Отже, $\angle 1 = \angle 2$.

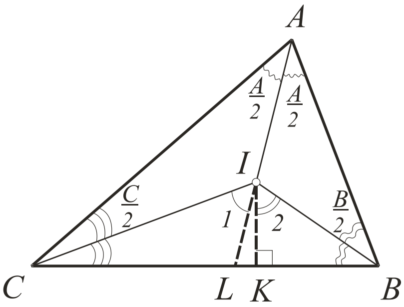

рис.7

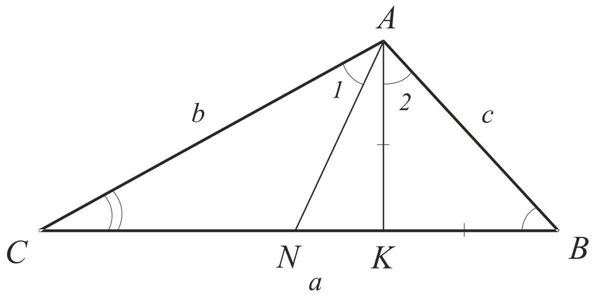

рис.8

Задача 7. Нехай AN та AK — ізогоналі в трикутнику ABC. До того ж, $AK = KB$ (рис. 8). Доведіть, що $AN = \frac{bc}{a}$, де $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Доведення. Оскільки $\angle 1 = \angle 2 = B$ за умовою, то $\triangle ACN \sim \triangle BCA$ за двома кутами. З подібності цих трикутників $\frac{AC}{BC} = \frac{AN}{AB}$, або $\frac{b}{a} = \frac{AN}{c}$, звідки $AN = \frac{bc}{a}$.

Задача 8. На ізогоналях n та q кута A взято довільні точки N та Q відповідно. З точки Q проведено перпендикуляри QE та QF до сторін кута (рис. 9). Доведіть, що $EF \perp AN$.

Доведення. Нехай $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$, а EF перетинає AN у точці T. Оскільки $\angle AEQ = \angle AFQ = 90^\circ$, то навколо чотирикутника $AEQF$ можна описати коло. Тоді $\angle 3 = \angle 2 = \alpha$ як вписані кути, що спираються на одну дугу. Звідси $\angle AET = 90^\circ - \angle 3 = 90^\circ - \angle 1$, а тому з трикутника AET маємо $\angle ATE = 90^\circ$. Це означає, що $EF \perp AN$.

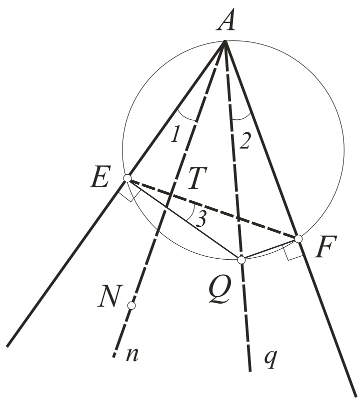

рис.9

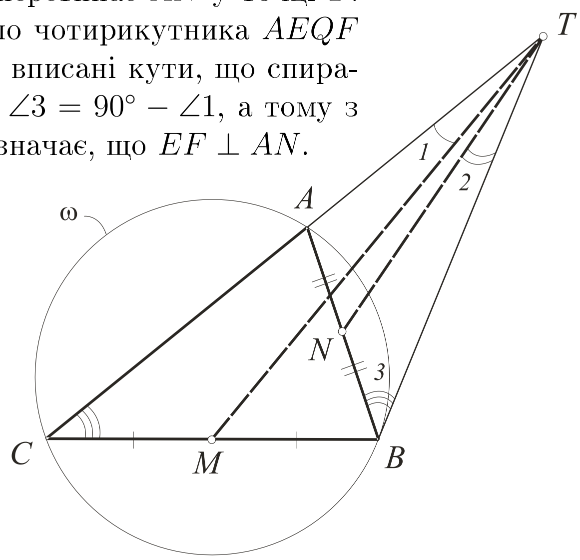

рис.10

Задача 9. Нехай ω — описане коло трикутника ABC. У вершині B проведено дотичну до ω, яка перетинає пряму CA в точці T (рис. 10), M та N — середини BC та AB відповідно. Доведіть, що TM і TN — ізогоналі.

Доведення. Оскільки $\angle 3 = C$ за властивістю кута між дотичною та хордою, то $\triangle TBA \sim \triangle TCB$ за двома кутами. Тоді TN і TM — відповідні медіани в подібних трикутниках. Отже, вони утворюють рівні кути з відповідними сторонами та $\angle 1 = \angle 2$.

Задача 10. Нехай $ABCD$ — трапеція з діагоналями AC і BD, K — середина AC, N — середина BD, причому $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 11). Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.

Доведення. Відкладемо на промені AN відрізок $AT = 2AN$, дістанемо паралелограм $ABTD$. Тоді $\angle 5 = \angle 1$ як різносторонні кути при паралельних прямих. Отже, $\triangle TBA \sim \triangle ABC$ за двома кутами ($\angle 5 = \angle 2$, кут B є спільним). Але BN і BK — відповідні медіани в цих трикутниках, тому вони утворюють рівні кути з відповідними сторонами, тобто $\angle 3 = \angle 4$.

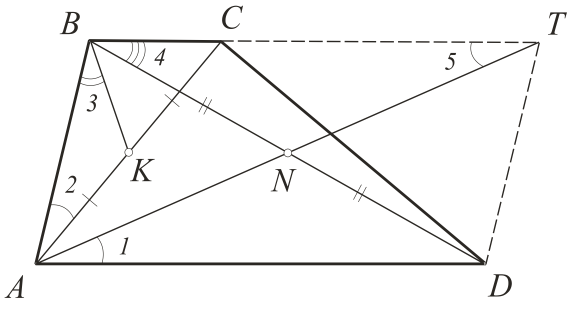

рис.11

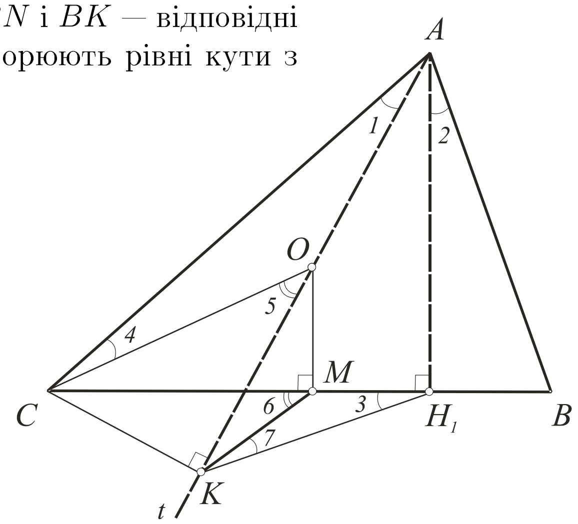

рис.12

Задача 11. Нехай AH_1 — висота трикутника ABC, t та AH_1 — ізогоналі, M — середина BC. З вершини C проведено перпендикуляр CK до променя t (рис. 12). Довести, що $KM = MH_1$.

Доведення. Оскільки $\angle AH_1C = \angle AKC = 90°$, то A, H_1, K, C належать одному колу з діаметром AC. Тому $\angle 1 = \angle 3$ як вписані кути. За задачею 1 точка O лежить на промені t. Але OM — серединний перпендикуляр до BC, тому $\angle OMC = \angle OKC = 90°$. Звідси O, M, K, C лежать на одному колу з діаметром OC та $\angle 5 = \angle 6$ як вписані кути. Нехай $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \alpha$. Тоді $\angle 5 = 2\alpha$ як зовнішній кут трикутника AOC. Таким чином, $\angle 6 = 2\alpha$. Цей кут є зовнішнім для трикутника H_1MK. Оскільки $\angle 3 = \alpha$, то і $\angle 7 = \alpha$. А це означає, що $KM = MH_1$.

Задача 12. Коло ω описано навколо трикутника ABC. Коло s дотикається внутрішнім чином до кола ω у вершині A трикутника ABC і перетинає сторону BC у точках K і N (рис. 13). Доведіть, що AK і AN — ізогоналі.

Доведення. Проведемо у вершині A спільну дотичну t до кіл ω та s. Позначимо $\angle 3 = C = \alpha$ (вони рівні за властивістю кута між хордою та дотичною). Аналогічно можна позначити $\angle 4 = \angle 5 = \beta$. Тоді $\angle 2 = \beta - \alpha$. Але $\angle 5$ є зовнішнім кутом трикутника ANC, тому $\angle 5 = \angle 1 + C$, звідки $\angle 1 = \angle 5 - C = \beta - \alpha$. Отже, $\angle 1 = \angle 2$, тобто AK і AN — ізогоналі.

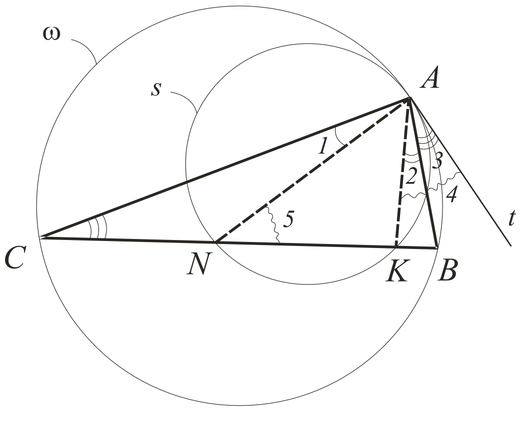

рис.13

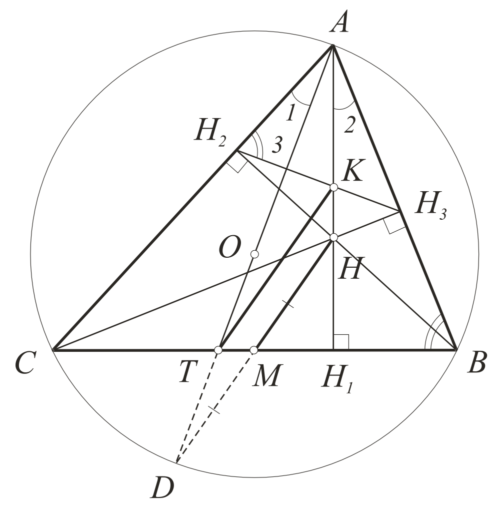

рис.14

Задача 13. Висоти AH_1, BH_2 і CH_3 трикутника ABC перетинаються в ортоцентрі H. Нехай K — точка перетину AH_1 з H_2H_3, T — точка перетину AO з BC, M — середина BC (рис. 14). Доведіть, що $KT \parallel HM$.

Доведення. Продовжимо AT до перетину з описаним колом трикутника ABC в точці D (тоді AD — діаметр кола) та з'єднаємо M і D. Оскільки точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно середин його сторін, належать описаному колу цього трикутника (відомий факт геометрії трикутника), то $H - M - D$ — одна пряма. Покажемо, що $\frac{AK}{AH} = \frac{AT}{AD}$, звідки випливатиме паралельність прямих KT і HM. Оскільки AO і AH_1 — ізогоналі, то за задачею 8 маємо $AO \perp H_2H_3$. Тоді $\angle 3 = B$ і $\triangle AH_2H_3 \sim \triangle ABC$ за двома кутами. Оскільки AK і AT — відповідні відрізки в цих трикутниках, а AH і AD — діаметри кіл, описаних навколо трикутників AH_2H_3 та ABC, то $\frac{AK}{AH} = \frac{AT}{AD}$ та $KT \parallel HM$.

Задача 14. У трикутнику ABC проведено ізогоналі AK і AN. Нехай BE та BF, CT та CQ — перпендикуляри до цих ізогоналей з точок B та C (рис. 15). Доведіть, що точки T, E, F, Q належать одному колу.

Доведення. Навколо чотирикутника $AEFB$ можна описати коло з діаметром AB, тому $\angle 3 = \angle 4$ як вписані кути. Аналогічно точки A, Q, T, C належать одному колу з діаметром AC та $\angle 5 = \angle 6$. Але

$$\angle 5 = 90^\circ - \angle CAQ,\ \angle 3 = 90^\circ - \angle BAE.$$

Але очевидно, що $\angle CAQ = \angle BAE$. Тому $\angle 5 = \angle 3$, звідки $\angle 6 = \angle 4$. Оскільки $\angle 6 = \angle 4$, то точки T, E, F, Q належать одному колу.

Зауваження. Неважко показати, що центром цього кола є середина сторони BC.

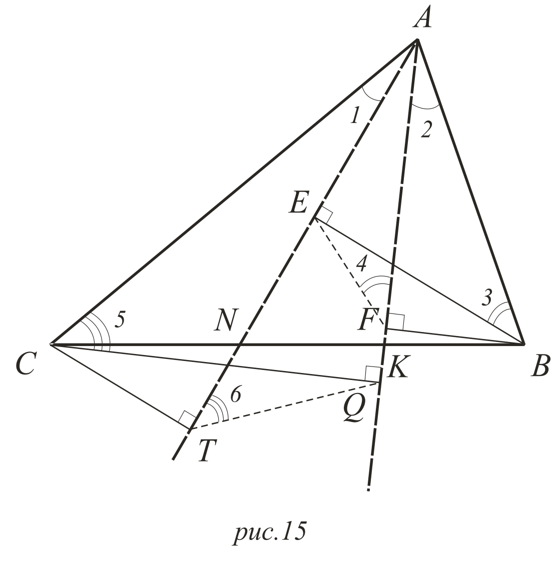

рис.15

Задача 15. На бісектрисі AL трикутника ABC дано точки K і N такі, що BK і BN — ізогоналі ($\angle 1 = \angle 2$). Доведіть, що в такому разі CK і CN — також ізогоналі, тобто $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 16).

Доведення. Нехай $\angle 1 = \angle 2 = \varphi$. Тоді $\angle 5 = \frac{A}{2} + \varphi$ як зовнішній кут трикутника AKB. Продовжимо бісектрису AL до перетину в точці W з колом ω, описаним навколо трикутника ABC. Очевидно, що $\angle 6 = \angle 7 = \frac{A}{2}$. Опишемо також коло s навколо трикутника BKN. Оскільки $\angle 6 + \angle 2 = \frac{A}{2} + \varphi$ та $\angle 5 = \frac{A}{2} + \varphi$, то WB — дотична до кола s. За теоремою про квадрат дотичної $WB^2 = WK \cdot WN$. Але згідно так званої "теореми про тризуб" $WB = WC$. Отже, $WC^2 = WK \cdot WN$ та WC — дотична до кола s_1, описаного навколо трикутника CKN. Тоді $\angle 7 + \angle 4 = \angle 8$, або $\angle 4 = \angle 8 - \frac{A}{2}$. Але $\angle 8 = \angle 3 + \frac{A}{2}$ як зовнішній кут трикутника AKC. Звідси випливає, що $\angle 3 = \angle 4$, або CK і CN — ізогоналі.

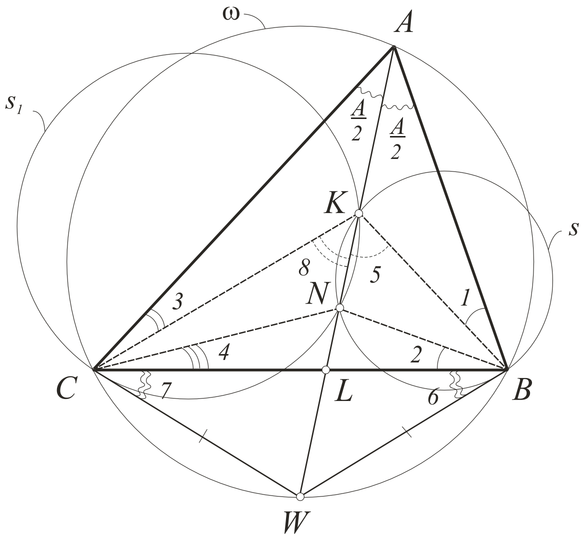

рис.16

Перед тим, як запропонувати низку задач для самостійного розв'язування, в яких беруть активну участь ізогоналі, зауважимо таке:

1) Створення ізогоналей в тій чи іншій конструкції можна розглядати як метод доведення деяких теорем, розв'язування окремих задач. Наприклад, класичне доведення теореми Птолемея пов'язано саме з проведенням ізогоналей.

2) У більшості задач ми розглядали гострокутний трикутник ABC. Пропонуємо читачам самостійно простежити, чи виникають суттєві відмінності при розгляді тупокутного трикутника ABC.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 16. Нехай X — точка всередині кута A, XK та XT — перпендикуляри з точки X до сторін кута, AE — перпендикуляр до KT. Доведіть, що AE та AX — ізогоналі.

Задача 17. Висота та медіана, проведені з вершини A трикутника ABC, є ізогоналями. Знайдіть величину кута A.

Задача 18. Знайдіть величини кутів трикутника ABC, якщо висота, медіана та бісектриса, проведені з вершини A, ділять кут $\angle A$ на чотири рівні частини.

Задача 19. На стороні BC трикутника ABC як на хорді проведено коло, яке перетинає AB і AC в точках K і T відповідно. Нехай P — центр описаного кола трикутника AKT. Доведіть, що точка P належить висоті трикутника ABC, проведеній з вершини A.

Задача 20. На двох ізогоналях взято по одній довільній точці. Доведіть, що добуток відстаней від цих точок до однієї сторони кута дорівнює добутку відстаней від цих точок до іншої сторони кута.

Задача 21. Проведено дві ізогоналі з вершини A трикутника ABC. З вершин B і C до ближчих до них ізогоналей проведено перпендикуляри BK і BT. Доведіть, що основа висоти, проведеної з вершини A, середина BC, а також точки K і T належать одному колу.

Задача 22. *(Г. Філіпповський)* В коло з центром O вписано прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Користуючись лише лінійкою, провести з вершини C ізогональ до CO.

Вказівка. Спочатку провести висоти C_1H_1 та C_2H_2 двох довільних гострокутних трикутників ABC_1 та ABC_2, а потім провести через точку C пряму, паралельну до C_1H_1 та C_2H_2.