Про пряму, яка з'єднує основи висот трикутника

Вероніка Стародуб[1], *Григорій Філіпповський*[2]

У цій статті розповідається про пряму H_2H_3, яка проходить через основи висот BH_2 та CH_3 *гострокутного* трикутника ABC. Ця пряма має цілу низку важливих та цікавих властивостей, що використовуються при розв'язуванні багатьох задач. Пропонуємо читачам самостійно поміркувати, які з властивостей прямої H_2H_3 залишаються правильними у випадку, коли трикутник ABC не обов'язково є гострокутним.

Будемо використовувати такі позначення (рис. 1):
A, B, C — вершини гострокутного трикутника;
AH_1, BH_2, CH_3 — висоти трикутника ABC;
H — ортоцентр трикутника ABC;
E_1 — середина AH;
M_1, M_2, M_3 — середини сторін BC, AC та AB відповідно;
Ω — описане коло трикутника ABC;
O — центр Ω;
N — точка перетину променя AH з колом Ω;
P — точка перетину прямих H_2H_3 та BC.

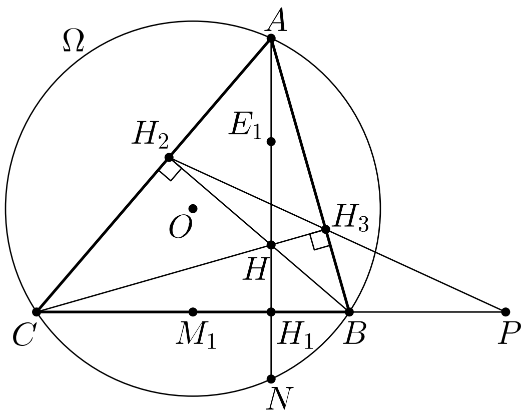

Рис. 1.

Задача 1. Довести, що трикутник ABC подібний до трикутника AH_2H_3 (рис. 1).

Доведення. Оскільки $\angle BH_2C = \angle BH_3C = 90^\circ$, то точки B, C, H_2, H_3 лежать на колі з діаметром BC. Тому $\angle CH_2H_3 = 180^\circ - B$, звідки $\angle AH_2H_3 = B$. Звідси випливає подібність трикутників AH_2H_3 та ABC за двома кутами.

Зауваження. Аналогічно можна показати, що

$$\triangle H_1BH_3 \sim \triangle H_1H_2C \sim \triangle ABC.$$

Задача 2. Довести, що $H_2H_3 = BC\cos A$.

Доведення. Трикутники ABC та AH_2H_3 подібні, тому $H_2H_3/BC = AH/AC = \cos A$ (рис. 1).

Задача 3. Серединний перпендикуляр до відрізка H_2H_3 перетинає сторону BC у точці M_1 — середині BC.

Доведення. Точки B, H_2, H_3, C належать колу з діаметром BC. Точка M_1 — центр цього кола, тому ця точка лежить на серединному перпендикулярі до H_2H_3.

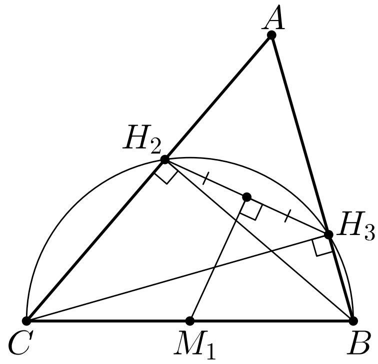

Рис. 2.

Задача 4. Побудувати трикутник ABC за вершинами B, C та прямою H_2H_3.

[1]учениця 9 класу Русанівського ліцею м. Києва.
[2]вчитель математики Русанівського ліцею м. Києва.

Розв'язок. З'єднаємо C та B та знайдемо середину відрізка BC — точку M_1. Проведемо коло з центром у точці M_1 та радіусом M_1B, яке перетне H_2H_3 у точках H_2 та H_3. Промені BH_3 та CH_2 перетинаються у вершині A.

Задача 5. Довести, що дотична t, проведена до описаного кола трикутника ABC у його вершині A, паралельна прямій H_2H_3.

Доведення. Трикутники AH_2H_3 та ABC подібні, тому $\angle AH_3H_2 = C$. Оскільки кут між хордою та дотичною дорівнює вписаному куту, який спирається на цю хорду, то $\angle H_3AK = C$ (рис. 3). Отже, $\angle AH_3H_2 = \angle H_3AK$, звідки $t \parallel BC$.

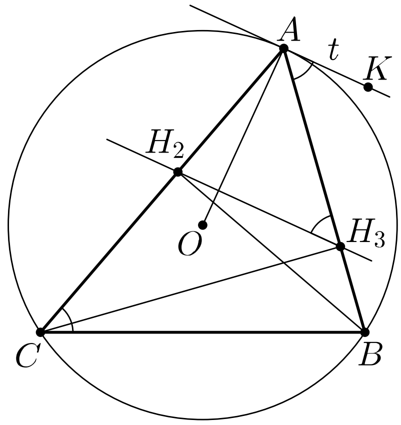

Рис. 3.

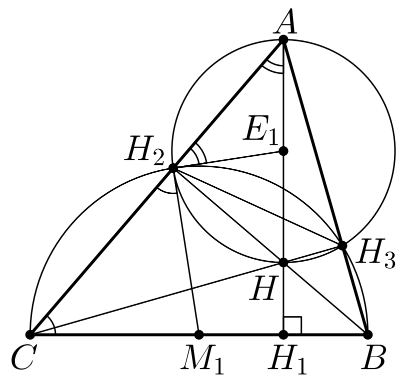

Рис. 4.

Задача 6. Довести, що пряма H_2H_3 перпендикулярна прямій AO, де O — центр описаного кола Ω трикутника ABC.

Доведення. Проведемо дотичну t до описаного кола трикутника ABC у вершині A (рис. 3). Оскільки $t \parallel H_2H_3$ (задача 5) та $AO \perp t$ (радіус перпендикулярний до дотичної), то $AO \perp H_2H_3$.

Задача 7. Довести, що H_2H_3 є хордою кола з діаметром M_1E_1, де M_1 — середина BC та E_1 — середина AH.

Доведення. Покажемо, що $\angle E_1H_2M_1 = 90°$. Оскільки точки B, C, H_2, H_3 лежать на колі з діаметром BC, а M_1 — центр цього кола, то $M_1C = M_1H_2$ як радіуси. Оскільки $\angle AH_2H = \angle AH_3H = 90°$, то точки A, H_2, H, H_3 лежать на колі з діаметром AH. Центром цього кола є точка E_1, тому $E_1A = E_1H_2$ як радіуси. Тепер з рівнобедрених трикутників CM_1H_2 та AE_1H_2 дістаємо (рис. 4), що

$$\angle CH_2M_1 + \angle AH_2E_1 = \angle ACH_1 + \angle CAH_1 = 90°,$$

звідки $\angle E_1H_2M_1 = 180° - \angle CH_2M_1 - \angle AH_2E_1 = 90°$. Аналогічно $\angle E_1H_3M_1 = 90°$, отже точки H_2, H_3 лежать на колі з діаметром E_1M_1.

Зауваження. Зрозуміло, що $\angle E_1H_1M_1 = 90°$, тому точка H_1 теж лежить на колі з діаметром E_1M_1. Отже, дане коло є описаним колом трикутника $H_1H_2H_3$. Але з аналогічних міркувань діаметрами цього кола є відрізки E_2M_2 та E_3M_3, де E_2, E_3 — середини BH та CH, а M_2, M_3 — середини AC та AB. Таким чином, точки H_1, H_2, H_3,

M_1, M_2, M_3, та E_1, E_2, E_3 лежать на одному колі. Це коло називають колом Ойлера або колом дев'яти точок.

Задача 8. Продовження висот BH_2 та CH_3 трикутника ABC перетинають описане коло Ω у точках T та K відповідно. Довести, що $TK \parallel H_2H_3$ (рис. 5).

Доведення. Відомо, що точки, симетричні ортоцентру H відносно сторін трикутника, лежать на колі Ω (покажіть!). Звідси випливає, що $HH_2 = H_2T$ та $HH_3 = H_3K$. Тому H_2H_3 — середня лінія трикутника HTK. Отже, $TK \parallel H_2H_3$.

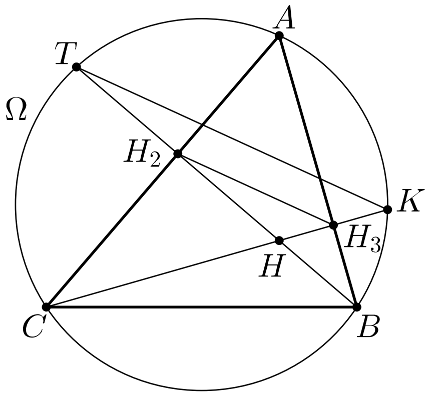

Рис. 5.

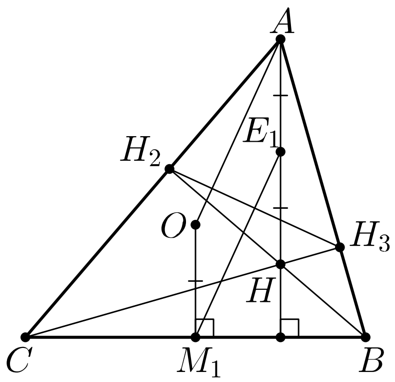

Рис. 6.

Задача 9. Довести, що $H_2H_3 \perp M_1E_1$ (рис. 6).

Доведення. Відомо, що $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ (доведіть!), а також $AH \parallel OM_1$. Тоді AE_1M_1O — паралелограм, оскільки $AE_1 = E_1H$. Тому $AO \parallel E_1M_1$. Але $AO \perp H_2H_3$ (задача 6). Отже, $M_1E_1 \perp H_2H_3$.

Задача 10. З точки H_1 провели перпендикуляри H_1T та H_1K до прямих AC та AB відповідно. Відрізки H_1T та H_1K подвоїли та дістали точки X та Y (рис. 7). Довести, що точки X, Y, H_2 та H_3 належать одній прямій.

Доведення. Точки H_1 та Y симетричні відносно AB, тому $\angle H_1H_3K = \angle KH_3Y$. Оскільки трикутники AH_2H_3, H_1BH_3 та ABC подібні (задача 1), то $\angle AH_3H_2 = \angle H_1H_3B = C$. Отже, $\angle KH_3Y = C = \angle AH_3H_2$. Тому точка Y належить прямій H_2H_3. Доведення для точки X аналогічне.

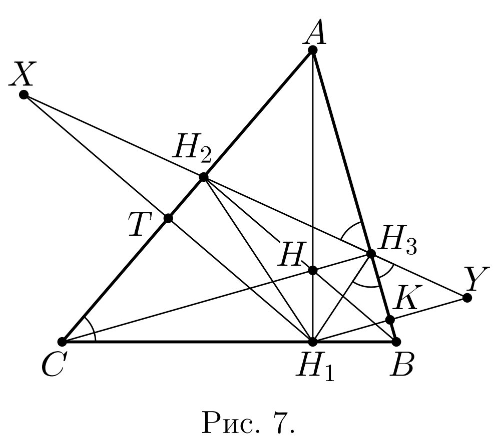

Рис. 7.

Задача 11. З точок B та C проведені перпендикуляри до прямої H_2H_3. Їх основи — точки K та F відповідно. Довести, що $H_3K = H_2F$ (рис. 8).

Доведення. Перпендикуляр, проведений з точки M_1 до прямої H_2H_3, перетинає відрізок H_2H_3 у його середині T (задача 3). Оскільки $BM_1 = M_1C$, то за теоремою Фалеса $FT = TK$. Але й $H_2T = TH_3$. Якщо від рівних відрізків відняти рівні, то залишаться рівні відрізки, тому $H_3K = H_2F$.

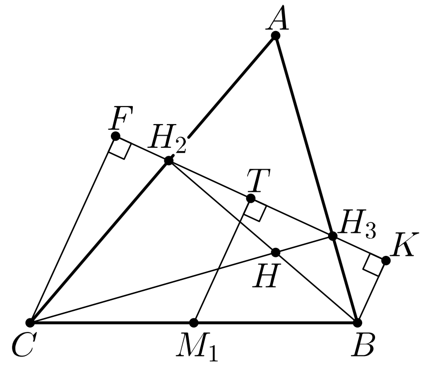

Рис. 8.

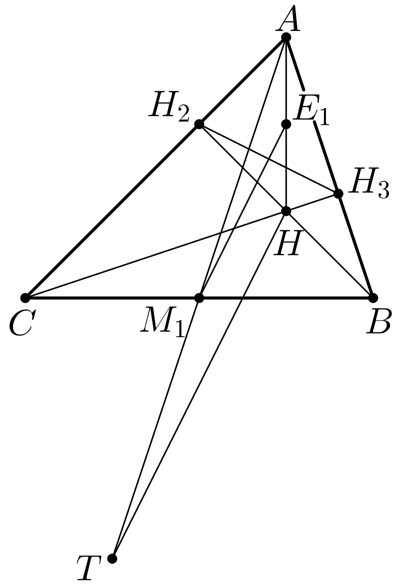

Рис. 9.

Задача 12. На продовженні медіани AM_1 трикутника ABC за точку M_1 відклали відрізок $AM_1 = M_1T$. Довести, що $TH \perp H_2H_3$ (рис. 9).

Доведення. З'єднаємо точки M_1 та E_1. Оскільки E_1 — середина AH та M_1 — середина AT, то M_1E_1 — середня лінія трикутника AHT. Але $M_1E_1 \perp H_2H_3$ (задача 9), отже і $TH \perp H_2H_3$.

Задача 13. Відновити трикутник ABC за вершиною A та прямими H_2H_3, BC.

Розв'язок. З точки A проведемо перпендикуляри AH_1 та AS на BC та H_2H_3 (рис. 10). Тепер ми знаємо довжини відповідних висот у подібних трикутниках ABC та AH_2H_3. Коефіцієнт подібності цих трикутників дорівнює $\cos A$ (задача 2). Отже, можна знайти кут A. Віднявши від кута A відомий кут $\angle SAH_1$, одержимо суму кутів $\angle H_2AS$ та $\angle H_1AB$. Оскільки $\angle H_2AS = \angle H_1AB$ (як кути між відповідними сторонами та висотами у подібних трикутниках), то можна знайти ці кути та відкласти їх від AS та AH_1. При цьому дістанемо промені AC та AB, які перетинають пряму BC у точках C та B.

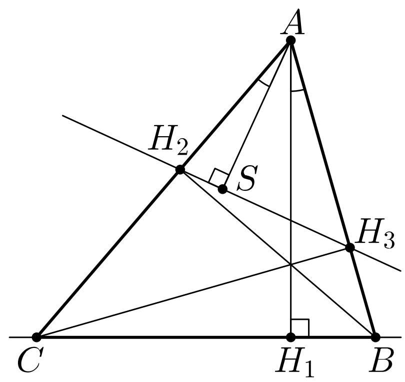

Рис. 10.

Задача 14. Нехай точка K симетрична до A відносно прямої H_2H_3. Довести, що точки K, H_1, H та O належать одному колу.

Доведення. Нехай T — проекція A на H_2H_3 (рис. 11). Оскільки $AO \perp H_2H_3$, то точки A, K, T та O належать одній прямій. Покажемо, що $AK \cdot AO = AH_1 \cdot AH$. Трикутники AH_2H_3 та ABC подібні, тому $AT/AH_1 = \cos A$, або $AK = 2AT = 2AH_1 \cos A$. Враховуючи, що $AH = 2AO \cos A$ (відомий факт геометрії трикутника), дістаємо, що $AK \cdot AO = 2AH_1 \cos A \cdot AO = AH_1 \cdot AH$, звідки випливає твердження задачі.

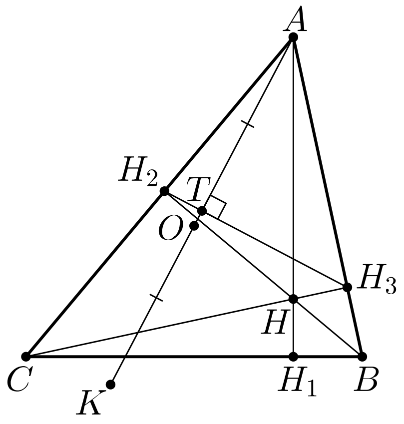

Рис. 11.

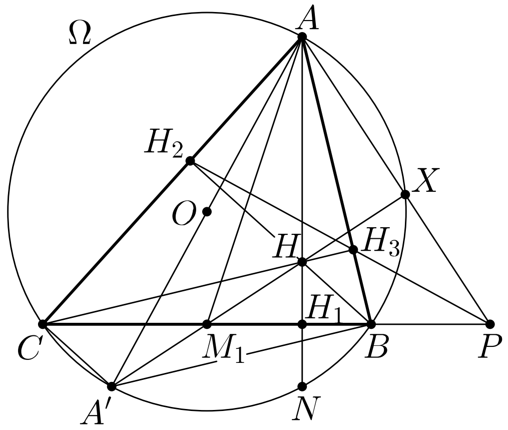

Рис. 12.

Задача 15. Нехай H_2H_3 перетинає пряму BC у точці P. Довести, що $AP \perp M_1H$.

Доведення. Нехай X — точка перетину AP з Ω — описаним колом трикутника ABC (рис. 12). Тоді $PX \cdot PA = PB \cdot PC$. Оскільки точки B, C, H_2, H_3 лежать на одному колі з діаметром BC, то $PB \cdot PC = PH_3 \cdot PH_2$. Звідси випливає, що $PX \cdot PA = PH_3 \cdot PH_2$, тобто точка X лежить на колі, описаному навколо трикутника AH_2H_3. Але точки A, H_2, H, H_3 лежать на колі з діаметром AH. Отже, $\angle HXA = 90°$. Продовжимо XH до перетину з Ω. Дістанемо точку A', діаметрально протилежну вершині A. Оскільки $\angle ACA' = 90°$ (вписаний, спирається на діаметр кола Ω), то $A'C \parallel BH$. Аналогічно $A'B \parallel CH$, а отже $BHCA'$ — паралелограм. Точка M_1 – середина BC — є точкою перетину діагоналей цього паралелограма. Таким чином, M_1 належить прямій HA', тобто $A' - M_1 - H - X$ — одна пряма та $M_1H \perp AP$.

Задача 16. Довести, що в умовах попередньої задачі $PH \perp AM_1$.

Доведення. Оскільки $M_1H \perp AP$ (задача 15) та $AH \perp BC$, то H — ортоцентр трикутника M_1AP (рис. 12), звідки $PH \perp AM_1$.

Задача 17. Нехай N — точка перетину продовження AH_1 з колом Ω (рис. 12). Довести, що точки P, A, M_1 та N належать одному колу.

Доведення. З того, що точки, симетричні ортоцентру відносно сторін трикутника, лежать на описаному колі, випливає, що точки H та N симетричні відносно прямої BC. Згідно задачі 16 точка H є ортоцентром трикутника M_1AP. Тому симетрична до H відносно сторони M_1P точка N лежить на описаному колі цього трикутника.

Задача 18. (III олімпіада ім. І.Ф. Шаригіна, 2007 р.) Нехай ABC — гострокутний трикутник. Коло з центром A та радіусом AH_1 перетинає пряму H_2H_3 у точках K та L, причому точки B та K лежать по одну сторону від AH_1 (рис. 13). Довести, що точка перетину прямих BK та CL лежить на прямій AO, де O — центр описаного кола трикутника ABC.

Доведення. Нехай T — точка перетину AO з H_2H_3. Оскільки $AO \perp H_2H_3$ (задача 6), то AT — висота трикутника AH_2H_3. Із задач 1 та 2 відомо, що трикутник AH_2H_3 подібний до трикутника ABC з коефіцієнтом подібності $\cos A$. Звідси $AT/AH_1 = \cos A$. Але $AL = AH_1$ як радіуси, тому $AT/AL = \cos A$ та з прямокутного трикутника ALT дістаємо, що $\angle LAT = A$. Оскільки $\angle CAO = 90° - B$, то $\angle LAC = A - 90° + B = 90° - C$. З трикутника CAH_1 знаходимо, що $\angle CAH_1 = 90° - C$. Тоді трикутники LAC та H_1AC рівні за двома сторонами та кутом між ними. Отже, $\angle ALT = 90°$, тобто CL — дотична в точці L до кола з центром A та радіусом AH_1. Аналогічно BK — дотична до цього кола в точці K. Ці дотичні перетинаються на серединному перпендикулярі до хорди KL, тобто на прямій AO.

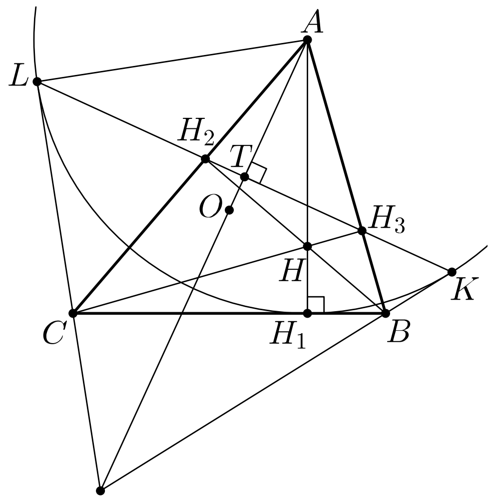

Рис. 13.

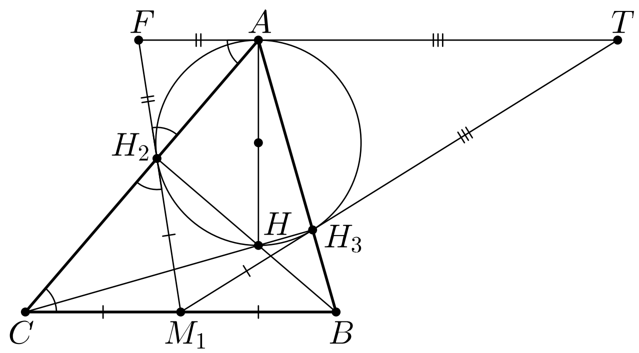

Рис. 14.

Задача 19. (VII олімпіада ім. І.Ф. Шаригіна, 2011 р.) Дано гострокутний трикутник ABC. Прямі H_2M_1 та H_3M_1 перетинають пряму, яка проходить через вершину A паралельно до BC, у точках F та T відповідно (рис. 14). Довести, що центр вписаного у трикутник M_1FT кола лежить на висоті трикутника ABC.

Доведення. Маємо $\angle AH_2F = \angle M_1H_2C = \angle H_2CM_1$, бо $H_2M_1 = M_1C$. Також маємо $\angle H_2CM_1 = \angle FAC$ (внутрішні різносторонні при паралельних прямих FT та BP). Тому трикутник FAH_2 рівнобедрений та $FA = FH_2$. Аналогічно $TA = TH_3$. Враховуючи, що $M_1H_2 = M_1H_3$, дістаємо, що вписане коло трикутника FTM_1 дотикається до його сторін у точках A, H_2, H_3. Оскільки точки A, H_2, H, H_3 лежать на колі з діаметром AH, то центром вписаного кола трикутника FTM_1 є середина AH.

Задачі для самостійного розв'язування.

Задача 20. Відновити трикутник ABC за точками H_2, H_3 та прямою BC.

Задача 21. (Ленінградська олімпіада, 1967 р.) З центром у вершині A трикутника ABC провели коло радіуса AH_1. З вершин B та C провели дотичні BK та CT до цього кола (K та T — точки дотику). Довести, що пряма KT збігається з H_2H_3.

Задача 22. Нехай H' — ортоцентр трикутника AM_2M_3. Довести, що прямі M_1H' та H_2H_3 перпендикулярні.

Задача 23. Пряма H_2H_3 перетинає коло Ω у точках T та K, а пряму BC у точці P. Довести, що $PH_2 \cdot PH_3 = PK \cdot PT$.

Задача 24. (Всеросійська олімпіада, 2005 р.) На дузі $\smile BAC$ описаного кола гострокутного трикутника ABC обрали довільну точку D. Прямі BH_2 та DC перетинаються в точці T, а прямі CH_3 та DB — в точці Q. Довести, що пряма H_2H_3 проходить через середину відрізка TQ.

Задача 25. Нехай ABC — гострокутний трикутник. З вершини C та точки H проведені перпендикуляри до прямої H_2H_3. Вони перетинають AB у точках K та T відповідно. Знайдіть KT, якщо $AC = b$ та $AB = c$.

Задача 26. Побудувати трикутник ABC за прямою OH та точками H_2, H_3.

Задача 27. (V олімпіада ім. І.Ф. Шаригіна, 2009 р.) Нехай T та Q — проекції точки H_3 відповідно на сторони AC та BC трикутника ABC. Довести, що пряма TQ ділить відрізок H_2H_3 навпіл.

Задача 28. Побудувати трикутник за точками H_2, H_3 та прямою AH_1.

Задача 29. Нехай Q — точка на колі, описаному навколо трикутника BHC. Пряма BQ перетинає пряму AC у точці D, а пряма CQ перетинає пряму AB у точці F. Довести, що пряма H_2H_3 ділить відрізок DF навпіл.

Задача 30. Нехай BL_2 та CL_3 — бісектриси трикутника ABC. Вписане коло трикутника ABC дотикається до сторін AC та AB у точках K_2 та K_3 відповідно. Довести, що прямі L_2L_3, K_2K_3 та H_2H_3 перетинаються в одній точці.