XXVII олімпіада з математики Русанівського ліцею

20 квітня 2024

6 клас
1 тур

Для вступу до Рл реєструйся за Qr-кодом

1. Дано дріб $\frac{2}{3}$. Дозволяється скільки завгодно разів додавати до його чисельника 9 або до його знаменника 10. Чи можна за допомогою таких операцій дістати дріб, рівний $\frac{3}{5}$?

Розв'язання. Після будь-яких дозволених операцій чисельник отриманого дробу не буде ділитися на 3, а отже дріб, рівний $\frac{3}{5}$, дістати не можна.

2. У корзині лежали яблука та груші. Спочатку яблук було 55%, а коли два фрукти з'їли, яблук стало 50%. Скільки груш було спочатку?

Розв'язання. Спочатку яблук було більше половини, а потім рівно половина. Тому серед фруктів, які з'їли, яблук більше половини, тобто обидва ці фрукти – яблука. Груші становили 45% від початкової кількості фруктів, а така ж кількість яблук та ще 2 яблука – 55%. Тому 2 яблука це 10%, тобто було 20 фруктів, серед яких 11 яблук та 9 груш.

Відповідь: 9 груш.

3. У шкільній олімпіаді з математики брали участь 100 учнів; з фізики – 50 учнів, а з інформатики – 48 учнів. Відомо, що рівно у двох олімпіадах взяли участь удвічі менше учнів, ніж в одній, а рівно у трьох олімпіадах – втричі менше, ніж в одній. Скільки учнів брали участь хоча б в одній олімпіаді?

Розв'язання. Помітимо, що у сумі $100 + 50 + 48 = 198$ кожного учня пораховано стільки разів, як кількість олімпіад, у яких він взяв участь. Нехай в одній, двох та трьох олімпіадах взяли участь x, $\frac{x}{2}$ та $\frac{x}{3}$ учнів відповідно. Тоді $x + 2 \cdot \frac{x}{2} + 3 \cdot \frac{x}{3} = 3x = 198$, тобто $x = 66$. Таким чином, в одній олімпіаді брали участь 66 учнів, у двох – 33 учні, а у трьох – 22 учня. Отже, хоча б в одній олімпіаді взяли участь $66 + 33 + 22 = 121$ учень.

Зауваження. Неважко перевірити, що описані в задачі події справді могли статися. Один з можливих прикладів розподілу учнів між олімпіадами показано на рисунку.

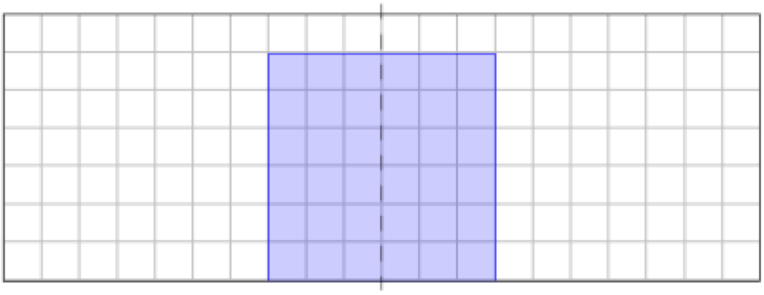
4. Барон Мюнхгаузен вважає вдалими моменти часу, коли число хвилин та число годин на екрані мобільного телефону є однаковими. Наприклад, 09:09 або 15:15. Щодня він розповідає друзям в Інтернеті про свої пригоди від 1,5 до 2 годин поспіль. Авжеж, він розпочинає та завершує зустріч із друзями у вдалі моменти часу. Скільки часу барон розповідає про свої пригоди?

Розв'язання. Якщо початок і завершення розповіді припадають на одну добу, то розповідь триває або 1 годину 1 хвилину (скажімо, 10:10 – 11:11), або принаймні 2 години 2 хвилини (наприклад, 13:13 – 15:15). Отже, умова задачі може виконуватися лише у випадку, коли під час розповіді барона

починається нова доба. Початок зустрічі це вдалий момент часу, коли до кінця доби залишається не більше 2 годин. Тому зустріч триває або від 22:22 до 00:00, або від 23:23 до 01:01. В обох випадках час зустрічі однаковий, а саме 1 година 38 хвилин.
Відповідь: 1 годину 38 хвилин.
5. Вранці на клумбі біля Русанівського ліцею росло 40 нарцисів та 45 ірисів. Кожен хлопець зривав 6 нарцисів та 1 ірис, а кожна дівчина 4 іриси та 1 нарцис. Скільки хлопців та скільки дівчат прийшло до ліцею до моменту, коли всі квітки закінчилися?
Розв'язання. Кожна дівчина зривала 5 квіток, тому кількість квіток, зірваних усіма дівчатами, ділиться на 5. Але загальна кількість квіток теж ділиться на 5. Тому кількість квіток, зірваних усіма хлопцями, ділиться на 5, а оскільки кожен хлопець зірвав 7 квіток, то на 5 ділиться кількість хлопців. Якщо хлопців було 5, вони зірвали 30 нарцисів та 5 ірисів, а дівчата 10 нарцисів та 40 ірисів. Це можливо, якщо дівчат було 10. Якби хлопців було 10 або більше, нарцисів би не вистачило, отже це неможливо.
Відповідь: 5 хлопців та 10 дівчат.

2 тур

6. Є мішок з 14 кг цукру. Як за допомогою шалькових терезів та гирі масою 400 г за три зважування відважити 3 кг цукру?
Розв'язання. На одну шальку покладемо гирю і висиплемо весь цукор на шальки так, аби вони зрівноважилися. Тоді на шальці з гирею буде 6 кг 800 г цукру, а на іншій шальці 7 кг 200 г. Тепер висиплемо ці 6 кг 800 г на шальки так, аби вони зрівноважилися і дістанемо по 3 кг 400 г на обох шальках. Нарешті, відважимо 400 г і залишиться 3 кг.
7. Двоє гравців грають на дошці 2024×25 клітинок у таку гру. Кожен по черзі відмічає квадрат по лініях сітки (будь-якого можливого розміру) і зафарбовує його. Виграє той, хто зафарбує останню клітинку. Двічі зафарбовувати клітинки не можна. Хто виграє при правильній грі і як йому треба грати?
Розв'язання. Нехай перший гравець першим ходом зафарбує квадрат 24×24, який прилягає до більшої сторони дошки та має з дошкою спільну вісь симетрії (на рисунку показано, як виглядав би аналогічний перший хід на дошці розміру 20×7). Тоді незафарбована частина дошки буде складатися з двох однакових частин, симетричних відносно цієї осі. Далі на кожен хід другого гравця перший гравець може відповідати симетричним ходом. Такий хід завжди можна зробити, оскільки другий гравець не може зафарбувати квадрат, що перетинає вісь симетрії.
Відповідь: Перемагає перший гравець.



8. (*Олександра Десятерик*) У вільний від супергеройства час Супермен працює у газеті «Дейлі Пленет». Якщо Супермен встане зі свого робочого місця, сяде в ліфт та підніметься на таку кількість поверхів, як номер його робочого поверху, то йому залишиться проїхати ще стільки ж, аби потрапити на верхній поверх. Якщо з верхнього поверху він спуститься на вісім поверхів, то аби спуститися на перший поверх йому знадобиться удвічі більше часу, ніж він витрачає на підйом з першого поверху на поверх, де знаходиться його робоче місце. Відомо, що ліфт рухається вгору і вниз з однаковою швидкістю. На якому поверсі працює Супермен і скільки поверхів у будинку газети «Дейлі Пленет»?

Розв'язання. Нехай Супермен працює на поверсі з номером N. Якщо він підніметься на N поверхів, а потім ще на N поверхів, він опиниться на поверсі з номером $3N$, тобто у будинку $3N$ поверхів. Аби піднятися на свій поверх з першого поверху, Супермен має проїхати $N-1$ поверх, а аби спуститися з $(3N-8)$-го поверху на перший, він має проїхати $3N-9$ поверхів. За умовою $3N-9=2(N-1)$, звідки $N=7$.

Відповідь: Супермен працює на 7 поверсі 21-поверхового будинку.

3 тур

9. До деякого дев'ятицифрового числа додали число, записане тими самими цифрами, але у протилежному порядку. Доведіть, що у записі суми є принаймні одна парна цифра.

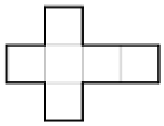
Розв'язання. Припустимо, що це не так. Оскільки у 5-му розряді додаються однакові цифри, то з 4-го розряду у 5-й був перенос. Тому сума цифр у 4-му (а отже, і у 6-му) розряді більша за 10. Це означає, що з 6-го розряду у 7-ий був перенос. Але тоді сума цифр у 7-му (а отже, і у 3-му) розряді парна. Тому з 2-го розряду у 3-й (та з 8-го у 9-й) був перенос. Але тоді сума цифр у 9-му (а отже, і у 1-му) розряді парна, а тому цифра одиниць суми парна, суперечність.

Зауваження. Твердження правильне для чисел з $4k+1$ цифрами, а для чисел з парною кількістю цифр або з $4k+3$ цифрами ні. Наприклад,

$$444555+555444=999999,$$
$$7272626+6262727=13535353.$$

7 клас

1 тур

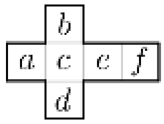


1. Люда записала на гранях паперового кубика числа від 1 до 6 так, що суми чисел на кожних двох протилежних гранях є однаковими. Ліля має розрізати цей кубик так, аби отримати розгортку, зображену на рисунку. Вона хоче, щоб сума трьох чисел у вертикальному рядку та сума чотирьох чисел у горизонтальному рядку на розгортці відрізнялися якнайменше. Яка найменша додатна різниця може в неї вийти незалежно від того, як розставляла числа Люда?

Розв'язання. Позначимо числа на гранях як показано на рисунку. Помітимо, що $a + e = b + d = c + f$, бо це суми чисел на протилежних гранях куба. Тоді різниця між сумою чисел у горизонтальному рядку та сумою чисел у вертикальному рядку дорівнює

$$(a + c + e + f) - (b + c + d) = (a + e) - (b + d) + f = f.$$

Ця різниця буде найменшою, якщо $f = 1$. Аби дістати саме таку різницю, Ліля має розрізати кубик так, щоб число 1 опинилося на розгортці у горизонтальному рядку в його найправішій клітинці. Зрозуміло, що вона завжди може це зробити.



Відповідь: 1.

2. Сума двох натуральних чисел дорівнює 2024. Якщо в одному з них закреслити останню цифру, то дістанемо друге число. Знайдіть всі такі числа.

Розв'язання. Позначимо шукані числа X та Y, $X > Y$. Тоді $X = 10Y + k$, де k – закреслена цифра, $0 \leq k \leq 9$. Отже, $X + Y = 11Y + k = 2024$. Тоді k це остача від ділення 2024 на 11. Оскільки 2024 ділиться на 11 націло, то $k = 0$, а шукані числа це $Y = 184$ та $X = 1840$.

Відповідь: 1840 та 184.

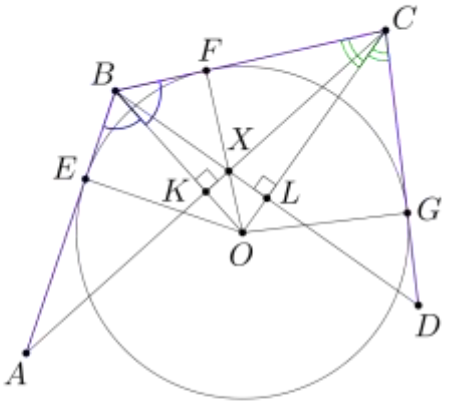
3. Два учні грають у таку гру. Спочатку по колу стоять числа 1, 2, 3, 4 (саме у такому порядку). Кожним ходом перший учень додає до двох сусідніх чисел по 1, а потім другий учень міняє місцями будь-які два сусідні числа. Перший учень виграє, якщо усі числа стануть рівними. Чи може другий учень йому завадити?

Розв'язання. Спочатку на колі парні та непарні числа чергувалися. Після ходу першого учня поруч стоять два парних та два непарних числа. Отже, другий учень може поміняти місцями парне та сусіднє з ним непарне число, і тоді парні та непарні числа знову чергуватимуться. Якщо другий учень і далі буде діяти таким чином, перед кожним ходом першого учня парні та непарні числа будуть чергуватися і він ніколи не зможе зробити всі числа рівними, тобто не виграє.

Відповідь: Так, зможе.

4. *(Григорій Філіпповський та Матвій Курський)* Коло з центром O дотикається до трьох рівних відрізків AB, BC та CD. Відрізки AC і BD перетинаються в точці X. Доведіть, що $OX \perp BC$.

Доведення. Позначимо E, F та G точки дотику кола з відрізками AB, BC та CD відповідно. Оскільки $BE = BF$ як дотичні та $\angle BEO = \angle BFO = 90°$, то прямокутні трикутники BEO та BFO рівні за катетом та гіпотенузою. Отже, $\angle ABO = \angle CBO$, тобто BO – бісектриса кута $\angle ABC$. Тому пряма BO містить висоту BK рівнобедреного трикутника ABC. Аналогічно пряма CO містить висоту CL рівнобедреного трикутника BCD. Це означає, що CK та BL – висоти трикутника BOC, а X – точка перетину висот цього трикутника, звідки $OX \perp BC$.



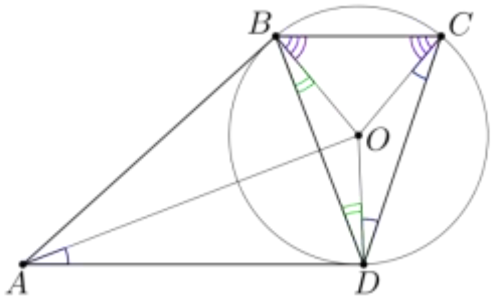
5. (*Михайло Сидоренко, учень 9 класу*) Зовні від гострокутного трикутника BCD побудували рівнобедрений трикутник ABD так, що $AB = AD$ та $AD \parallel BC$. Нехай O – центр описаного кола трикутника BCD. Доведіть, що $\angle OAD = \angle OCD$.

Розв'язання. Трикутники OCD, OBD та OBC рівнобедрені. Позначимо кути при основі цих трикутників $\angle OCD = \angle ODC = \alpha$, $\angle OBD = \angle ODB = \beta$ та $\angle OBC = \angle OCB = \gamma$. Тоді $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180°$, тобто $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Оскільки $AD \parallel BC$, то $\angle ADB = \angle DBC = \beta + \gamma = 90° - \alpha$. Тому кут при вершині рівнобедреного трикутника ABD дорівнює

$$\angle BAD = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha.$$

Але трикутники OAB та OAD рівні за трьома сторонами, тому

$$\angle OAB = \angle OAD = \tfrac{1}{2}\angle BAD = \alpha = \angle OCD.$$



2 тур

6. Доведіть, що $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2023}{2024} < \frac{1}{45}$.

Розв'язання. Позначимо

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2023}{2024} \text{ та } B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2024}{2025}.$$

Помітимо, що $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, $\cdots$, $\frac{2023}{2024} < \frac{2024}{2025}$, звідки $A < B$, а також

$$AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2023}{2024} \cdot \frac{2024}{2025} = \frac{1}{2025} = \frac{1}{45^2}.$$

Звідси $A^2 < AB = \frac{1}{45^2}$, тобто $A < \frac{1}{45}$.

7. Доведіть, що вираз $x^4 + 100x^2 + 99x + 100$ набуває додатних значень при будь-яких значеннях x.

Розв'язання. Перепишемо вираз таким чином:

$$\begin{aligned} x^4 + 100x^2 + 99x + 100 &= x^4 - x + 100(x^2 + x + 1) = \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 100(x^2 + x + 1) = \\ &= (x^2 - x + 100)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Залишилося зауважити, що значення виразів

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} \text{ та } x^2 - x + 100 = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + 99\tfrac{3}{4}$$

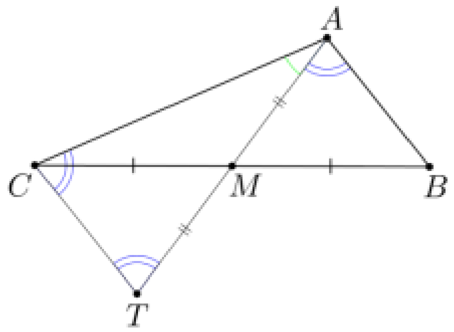
завжди додатні.

8. (*Григорій Філіпповський*) У трикутнику ABC медіана AM дорівнює половині сторони AC. Чи обов'язково цей трикутник є тупокутним?

Розв'язання. Продовжимо медіану на відрізок $MT = AM$. Дістанемо рівнобедрений трикутник ATC ($AT = 2AM = AC$). Позначимо $\angle CAT = \alpha$. Тоді $\angle ACT = \angle CTA = 90° - {}^{\alpha}/_{2}$. Трикутники AMB та TMC рівні за двома сторонами та кутом між ними, тому $\angle MAB = \angle MTC = 90° - {}^{\alpha}/_{2}$. Звідси

$\angle CAB = \angle CAT + \angle MAB = \alpha + (90° - {}^{\alpha}/_{2}) = 90° + {}^{\alpha}/_{2} > 90°$.

Відповідь: Так, обов'язково.



3 тур

9. Про натуральні числа $a > b > c > d$ відомо, що їхня сума дорівнює 2024, а також $(a - b)(c - d) + (a - d)(b - c) = 27$. Знайдіть ці числа.

Розв'язання. Спростимо вираз у лівій частині рівняння:

$$(a - b)(c - d) + (a - d)(b - c) =$$
$$= ac - ad - bc + bd + ab - ac - bd + cd =$$
$$= ab + cd - ad - bc = (a - c)(b - d).$$

Отже, $(a - c)(b - d) = 27$. Оскільки за умовою $a > b > c$, то обидва множники $a - c$ та $b - d$ є більшими за 1, а тому один з них дорівнює 3, а інший 9. Розглянемо два випадки.

1) Нехай $a - c = 3$ та $b - d = 9$. Тоді $b - c = 1$ та $a - b = 2$ або навпаки.

Якщо $b - c = 1$, то $c - d = 8$. Тому

$$a + b + c + d = (c + 3) + (c + 1) + c + (c - 8) = 2024,$$

звідки $4c = 2028$, $c = 507$ та дістаємо $(a; b; c; d) = (510; 508; 507; 499)$.

Якщо $b - c = 2$, то $c - d = 7$. Тому

$$a + b + c + d = (c + 3) + (c + 2) + c + (c - 7) = 2024,$$

звідки $4c = 2026$, що неможливо, бо 2026 не ділиться на 4.

2) Нехай $a - c = 9$ та $b - d = 3$. Тоді $b - c = 1$ та $c - d = 2$ або навпаки.

Якщо $b - c = 1$, то $a - b = 8$. Тому

$$a + b + c + d = (b + 8) + b + (b - 1) + (b - 3) = 2024,$$

звідки 4b=2020, b=505 та дістаємо $(a; b; c; d) = (513; 505; 503; 502)$.

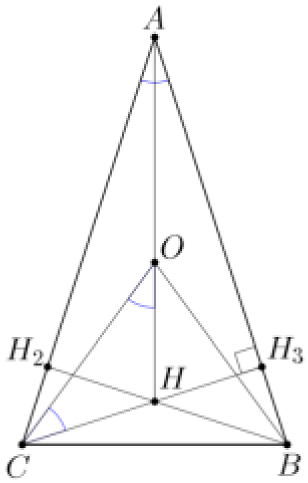
Нарешті, якщо $b - c = 2$, то $a - b = 7$. Тому

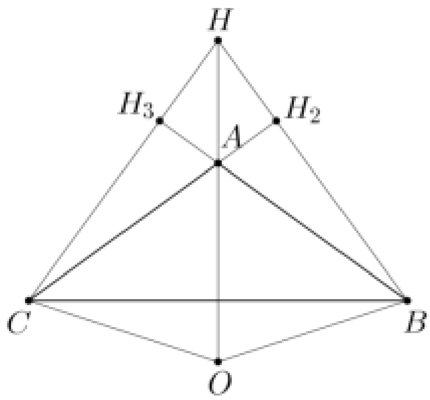
$$a + b + c + d = (b + 7) + b + (b - 2) + (b - 3) = 2024,$$

звідки $4b = 2022$, що неможливо, бо 2022 не ділиться на 4.

Відповідь: $(a; b; c; d) = (510; 508; 507; 499)$ або $(513; 505; 503; 502)$.

10. *(Григорій Філіпповський)* Нехай H – ортоцентр (точка перетину прямих, що містять висоти) та O – центр описаного кола трикутника ABC. Коло з центром у точці H проходить через точки O, B та С. Знайдіть кути трикутника ABC.





Розв'язання. Оскільки точка H лежить на серединному перпендикулярі до BC, то висота трикутника, проведена з вершини A, є медіаною, а тому трикутник рівнобедрений ($AB = AC$). Розглянемо окремо випадки.

1) Нехай трикутник ABC гострокутний. Точка O лежить між A та H, бо інакше $HO < HC$. Позначимо $\angle CAB = \alpha$. Оскільки AO – бісектриса, то у рівнобедреному трикутнику AOC маємо $\angle CAO = \angle OCA = \frac{\alpha}{2}$. Звідси $\angle COH = \alpha$ (зовнішній кут трикутника AOC) та $\angle OCH = \alpha$, бо трикутник OHC рівнобедрений. Отже, $\angle ACH_3 = \frac{3\alpha}{2}$ та сума кутів трикутника ACH_3 дорівнює $\alpha + \frac{3\alpha}{2} + 90° = 180°$. Тому $\frac{5\alpha}{2} = 90°$, $\alpha = 36°$, а кути трикутника 36°, 72° та 72°.

2) Рівнобедрений прямокутний трикутник ABC не задовольняє умову, бо для нього $HO < HC$.

3) Нехай трикутник ABC тупокутний. Позначимо $\angle CAB = \alpha$. Оскільки AO – бісектриса, то у рівнобедреному трикутнику AOC маємо $\angle CAO = \angle OCA = \frac{\alpha}{2}$. Точка H лежить на продовженні висоти за точку A, тому $\angle COH = \angle COA = 180° - \alpha$ та $\angle OCH = 180° - \alpha$, бо трикутник OHC рівнобедрений. Звідси $\angle ACH_3 = 180° - \frac{3\alpha}{2}$ та сума кутів трикутника ACH_3 дорівнює $180° - \alpha + 180° - \frac{3\alpha}{2} + 90° = 180°$. Тому $\frac{5\alpha}{2} = 270°$, $\alpha = 108°$, а кути трикутника 108°, 36° та 36°.

Відповідь: $\angle A = 36°, \angle B = \angle C = 72°$ або $\angle A = 108°, \angle B = \angle C = 36°$.

8 клас

1. У колекціонера є декілька старовинних монет різної ваги. Він зважив кожну пару монет і записав різницю між вагою монет у парі. Виявилося, що всі різниці зустрічаються по одному разу і дорівнюють 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г та 6 г, а найлегша монета має вагу 30 г. Знайдіть кількість монет і вагу кожної монети.

Розв'язання. Зрозуміло, що чим більше монет, тим більше різних пар з них можна утворити, та з чотирьох монет можна утворити як раз 6 пар (1-а та 2-а, 1-а та 3-я, 1-а та 4-а, 2-а та 3-я, 2-а та 4-а, 3-я та 4-а монети). Тому монет рівно чотири. Найлегша з них важить 30 г, а найважча 36 г. Оскільки вага деяких двох монет відрізняється на 5 г, то деяка монета важить 31 г або 35 г. В обох випадках перебором встановлюємо єдину можливу вагу останньої монети.

Відповідь: 4 монети вагою 30 г, 32 г, 35 г, 36 г або 30 г, 31 г, 34 г, 36 г.

2. Викресліть із добутку $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$ один зі ста факторіалів так, аби добуток чисел, що залишилися, був квадратом натурального числа.

(Тут $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

Розв'язання. Помітимо, що

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100! = 1! \cdot (1! \cdot 2) \cdot 3! \cdot (3! \cdot 4) \cdot \ldots \cdot 99! \cdot (99! \cdot 100) =$$
$$= (1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 99!)^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100 = (1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 99!)^2 \cdot 2^{50} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 50 =$$
$$= (1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 99! \cdot 2^{25})^2 \cdot 50!$$

Тому якщо викреслити множник $50!$, то залишиться квадрат натурального числа.

3. Про додатні числа a, b, c відомо, що

$$\frac{a^2}{b} + 2c = \frac{b^2}{c} + 2a = \frac{c^2}{a} + 2b.$$

Доведіть, що $a = b = c$.

Розв'язання. Якщо $\frac{a^2+2bc}{b} = \frac{b^2+2ac}{c} = \frac{c^2+2ab}{a} = t$, то

$$a^2 + 2bc + b^2 + 2ac + c^2 + 2ab = tb + tc + ta,$$

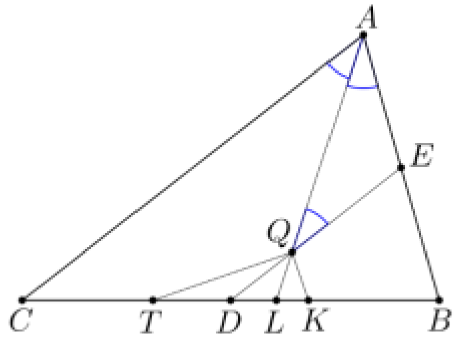
або $(a+b+c)^2 = t(a+b+c)$, звідки $t = a+b+c$, бо $a+b+c \neq 0$.

Таким чином,

$$\begin{cases} a^2 + 2bc = b(a+b+c), \\ b^2 + 2ac = c(a+b+c), \\ c^2 + 2ab = a(a+b+c), \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a(a-b) = b(b-c), \\ b(b-c) = c(c-a), \\ c(c-a) = a(a-b). \end{cases}$$

Якщо $a \geq b$, то з рівнянь системи випливає, що $a \geq b \geq c \geq a$, тобто насправді $a = b = c$. Якщо $a \leq b$, то аналогічно $a \leq b \leq c \leq a$ і знову дістаємо, що $a = b = c$.

4. (*Григорій Філіпповський*) У трикутнику ABC, в якому $AC > AB$, точки D, E – середини сторін BC та AB відповідно, K, T – точки дотику вписаного та зовнівписаного кіл зі стороною BC, а бісектриса AL перетинає середню лінію DE у точці Q. Знайдіть величину кута $\angle KQT$.



Розв'язання. Позначимо $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тоді $DE = \frac{b}{2}$ (середня лінія). Оскільки AQ – бісектриса та $DE \parallel AC$, то $\angle EQA = \angle CAQ = \angle QAE$. Отже, трикутник QAE рівнобедрений та $QE = AE = \frac{c}{2}$. Звідси

$$DQ = DE - QE = \frac{b-c}{2}.$$

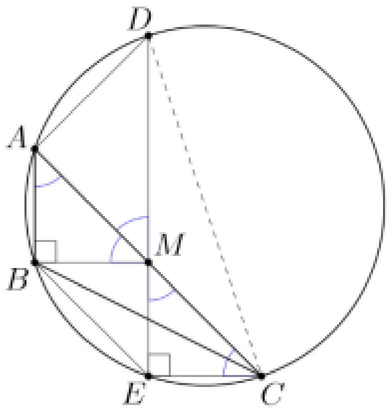
Як відомо, $BK = CT = p - b = \frac{a+c-b}{2}$, де p – півпериметр трикутника. Тому

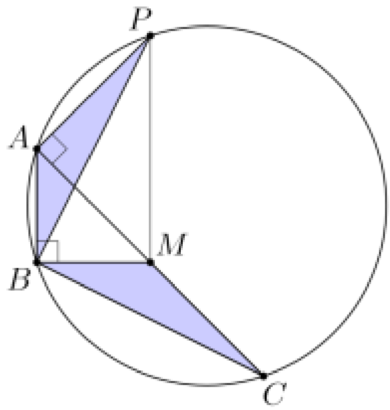
$DK = DT = \frac{a}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b-c}{2} = DQ$. Отже, у трикутнику KQT медіана дорівнює половині сторони, звідки $\angle KQT = 90°$.

Відповідь: $\angle KQT = 90°$.

5. (*Михайло Сидоренко, учень 9 класу*) У трикутнику ABC про медіану BM відомо, що $BM = AB$ та $BM \perp AB$. На описаному колі трикутника ABC відмітили точку D так, що $DM \perp BM$, причому точки A та D лежать по одну сторону від BM. Доведіть, що $\angle DAC = 90°$.

Розв'язання. *І спосіб.* Добудуємо трикутник ABC до рівнобічної трапеції $ABEC$. Тоді ABM та CEM – рівні рівнобедрені прямокутні трикутники, звідки $\angle AMD = \angle EMC = 45°$, отже $D - M - E$ – одна пряма. Оскільки точки E та D лежать на описаному колі трикутника ABC та $\angle DEC = 90°$, то DC – діаметр цього кола та $\angle DAC = 90°$.

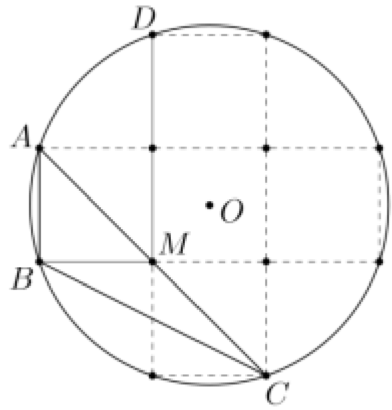




ІІ спосіб. Нехай CP – діаметр описаного кола трикутника ABC. Достатньо довести, що $P = D$, а для цього у свою чергу достатньо показати, що $MP \perp BM$. За вибором точки P маємо

$$\angle BAP = \angle BAC + \angle CAP = 45° + 90° = 135°,$$
$$\angle BMC = 180° - \angle AMB = 180° - 45° = 135°,$$

а також $\angle MCB = \angle ACB = \angle APB$ як вписані кути, що спираються на одну дугу. Тому трикутники BAP та BMC подібні, а оскільки $BA = BM$, то ці трикутники рівні. Тому $AP = MC = BM$, звідки PAM – прямокутний рівнобедрений трикутник та $\angle BMP = \angle BMA + \angle AMP = 45° + 45° = 90°$, що завершує доведення.



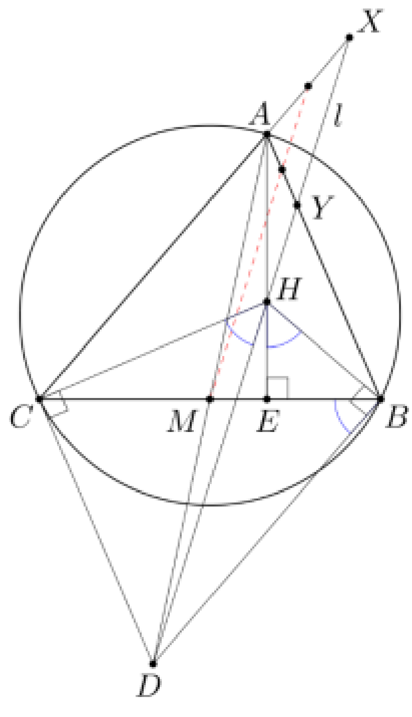
III спосіб. Добудуємо рівнобедрений прямокутний трикутник ABM до «хреста» з п'яти квадратів, як показано на рисунку. Зрозуміло, що описане коло трикутника ABC має спільний центр O із центральним квадратом «хреста», точка D є вершиною ще одного з квадратів та O є серединою CD. Тоді CD є діаметром кола, описаного навколо трикутника ABC, звідки $\angle DAC = 90°$.

6. (*Матвій Курський*) Дано коло з хордою BC. На більшій дузі цього кола обрали довільну точку A. Нехай H – ортоцентр трикутника ABC. Пряма l, яка є симетричною прямій AH відносно бісектриси кута BHC, перетинає прямі AC та AB у точках X та Y. Доведіть, що пряма, яка сполучає середини відрізків AX та AY, проходить через сталу точку на площині, яка не залежить від вибору точки A.

Розв'язання. Добудуємо трикутник ABC до паралелограма $ABDC$. Оскільки $BH \perp AC$ та $BD \parallel AC$, то $BH \perp BD$. Аналогічно $CH \perp CD$. Отже, чотирикутник $HBDC$ вписаний у коло з діаметром HD. Тоді

$$\angle CHD = \angle CBD = 90° - \angle HBE = \angle EHB.$$

Отже, прямі HE та HD симетричні відносно бісектриси кута BHC, тобто точка D належить прямій l. Таким чином, $X - Y - H - D$ – одна пряма, а тому і середини відрізків AX, AY та AD лежать на одній прямій. Отже, пряма, яка сполучає середини відрізків AX та AY, завжди проходить через точку M, яка є спільною серединою відрізків BC і AD.



Командна олімпіада, 9-10 класи.

1. На шахівниці 8×8 стоять вісім тур восьми різних кольорів, які не б'ють одна одну. Кожну клітинку, яку б'ють дві тури, або фарбують у колір тієї з двох тур, яка ближче, або ділять навпіл і фарбують половини у кольори обох тур, якщо вони знаходяться на однаковій відстані від даної клітинки. Доведіть, що у кожен колір буде зафарбовано однакову площу.

Розв'язання. Розглянемо будь-які дві тури. Дві клітинки, на яких вони стоять, та дві клітинки, які вони одночасно б'ють, є кутовими клітинками деякого прямокутника. В залежності від того, чи є цей прямокутник квадратом, у кольори обох тур буде зафарбовано або по одній кутовій клітинці, або по половині двох кутових клітинок. Тому у колір кожної тури буде пофарбовано рівно половину від площі вільних клітинок, які стоять з нею в одному рядку або в одному стовпчику, тобто площу 7 клітинок.

2. Нехай $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \dots$ – всі прості числа, виписані у порядку зростання, та $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$. Доведіть, що серед чисел $1, 2, \dots, N$ рівно половина ділиться на непарну кількість простих чисел з множини $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Розв'язання. Розіб'ємо всі числа від 1 до N на пари чисел вигляду

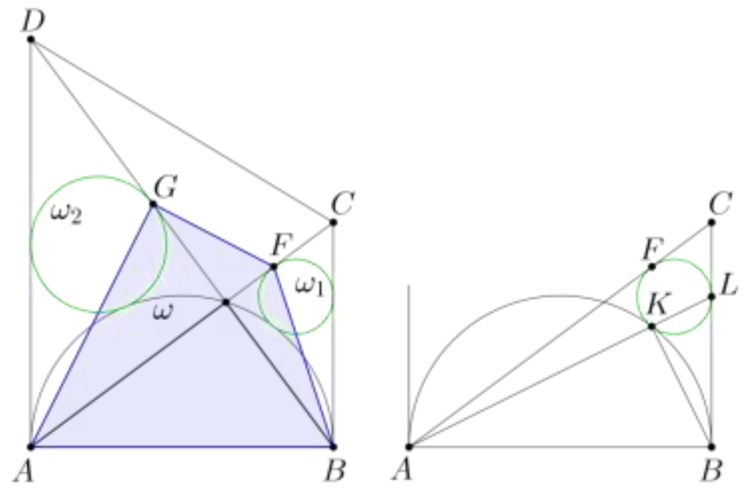
$$\left(a, a + \frac{N}{2}\right), 1 \le a \le \frac{N}{2}.$$

У кожній парі рівно одне з чисел ділиться на $p_1 = 2$, а кожне з чисел $p_2, \dots, p_n$ або є дільником обох чисел пари, або не є дільником жодного з них. Тому у кожній парі рівно одне число має непарну кількість дільників у множині $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, а отже рівно половина чисел має цю властивість.

3. (*Михайло Плотніков*) Нехай $ABCD$ – прямокутна трапеція ($AD \parallel BC$, $\angle A = 90°$). Півколо ω з діаметром AB проходить через точку перетину діагоналей трапеції. Кола ω_1 та ω_2 вписані у кути ACB та ADB відповідно та дотикаються до півкола ω зовнішнім чином. Позначимо F та G точки дотику кола ω_1 з AC та кола ω_2 з BD. Знайдіть площу чотирикутника $ABFG$, якщо $AB = 1$.

Розв'язання. Покажемо, що $AF = AB = 1$. Позначимо K та L точки дотику кола ω_1 з півколом ω та з BC. При гомотетії з центром K, яка переводить ω_1 у коло з діаметром AB, пряма BC переходить у дотичну до цього кола, паралельну до BC, тобто у дотичну у точці A. Отже, точка L переходить у точку A, а тому $A - K - L$ – одна пряма. Оскільки $\angle AKB = 90°$, то у прямокутному трикутнику ABL точка K це основа висоти, проведеної до гіпотенузи. Звідси $AK \cdot AL = AB^2 = 1$. З іншого боку $AF^2 = AK \cdot AL = 1$ за властивістю дотичної та січної, отже $AF = 1$. Аналогічно $BG = 1$.

Оскільки діагоналі чотирикутника $ABFG$ перпендикулярні, його площа дорівнює $\frac{1}{2} AF \cdot BG = \frac{1}{2}$.



4. На дошці записані декілька різних натуральних чисел a_1, a_2, … , a_m, жодне з яких не є початком іншого (наприклад, на дошці не може одночасно бути чисел 17 та 1725). Знайдіть найбільше можливе значення суми $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_m}$.

Розв'язання. Припустимо, що найбільше з чисел на дошці складається з двох або більшої кількості цифр. Нехай це число $10n + k$, де $0 \leq k \leq 9$. Тоді на дошці немає числа n і умова не порушиться, а сума може лише збільшитися, якщо дописати на дошку ті з чисел $10n, 10n + 1, \dots, 10n + 9$, яких там немає. Якщо тепер викреслити усі числа $10n, 10n + 1, \dots, 10n + 9$ і записати замість них число n, то умова не порушиться, а сума знову збільшиться, бо

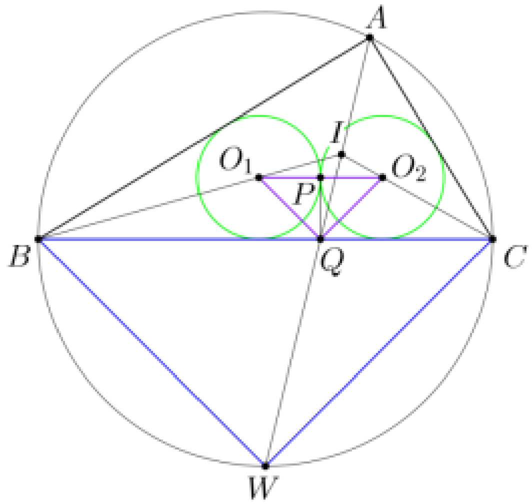
$$\frac{1}{10n} + \frac{1}{10n+1} + \frac{1}{10n+2} + \cdots + \frac{1}{10n+9} < \frac{10}{10n} = \frac{1}{n}.$$

Таким чином, суму можна збільшувати, доки на дошці не опиняться лише одноцифрові числа. Допишемо ті з чисел $1, 2, \dots, 9$, яких не вистачає, та дістанемо суму $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9}$. Зрозуміло, що ця сума і є найбільшою можливою.

Відповідь: $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9}$.

5. (*Богдан Желябовський, учень 10 класу*) На півколі з діаметром BC обрали довільну точку A. Всередині трикутника ABC розташовані два однакові кола, які вписані у кути ABC і ACB та дотикаються зовнішнім чином у точці P. Нехай Q – проекція P на BC. Доведіть, що пряма AQ завжди проходить через сталу точку на площині, яка не залежить від вибору точки A.

Розв'язання. Нехай I – центр вписаного у трикутник ABC кола, O_1 та O_2 – центри двох однакових кіл з умови задачі, а r – радіус цих кіл. Зрозуміло, що точки O_1 та O_2 лежать на бісектрисах BI та CI відповідно, причому $O_1O_2 \parallel BC$. Оскільки $O_1P = O_2P = PQ = r$ та $O_1O_2 \perp PQ$, то трикутник O_1O_2Q рівнобедрений прямокутний. Нехай бісектриса кута BAC перетинає описане коло у точці W. Тоді трикутник BCW теж рівнобедрений прямокутний. При гомотетії з центром I, яка переводить O_1O_2 у BC, трикутник O_1O_2Q переходить у трикутник BCW, отже $I - Q - W$ – одна пряма. Оскільки точка A теж належить цій прямій, то пряма AQ завжди проходить через точку W.



6. Многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ має дійсний корінь. Доведіть, що $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.

Розв'язання. Нехай t – корінь многочлена. Тоді $t^4 + 1 = -at^3 - bt^2 - ct$. За нерівністю Коші – Буняковського

$$t^4 + 1 = |at^3 + bt^2 + ct| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{t^6 + t^4 + t^2},$$

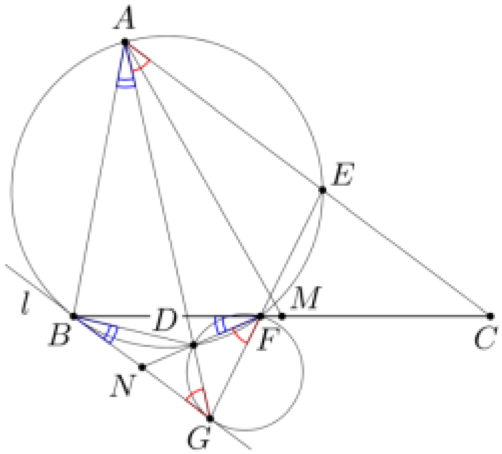
отже $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(t^4+1)^2}{t^6+t^4+t^2}$. Залишається довести, що $\frac{(t^4+1)^2}{t^6+t^4+t^2} \geq \frac{4}{3}$, або $3(t^4 + 1)^2 \geq 4(t^6 + t^4 + t^2)$, або $3(s^2 + 1)^2 \geq 4(s^3 + s^2 + s)$, де $s = t^2$. Остання нерівність рівносильна очевидній нерівності

$$(s - 1)^2(3s^2 + 2s + 3) \geq 0.$$

Зауваження. Многочлен $x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ має корінь $x = 1$ і для нього досягається рівність $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$.

7. (*Максим Григоров*) Через вершину B трикутника ABC провели пряму $l \parallel AC$. Коло, яке проходить через точку A та дотикається до l у точці B, перетинає сторони AC та BC у точках E та F відповідно. Нехай G – точка перетину прямих EF та l, а M – середина сторони BC. Доведіть, що $\angle BAG = \angle MAC$.

Розв'язання. Нехай пряма AG перетинає коло, описане навколо трикутника ABE, у точці D. Оскільки пряма BG дотикається до описаного кола трикутника ABE, то $\angle DBG = \angle DAB = \angle BFD$, а оскільки $BG \parallel AC$ і точки A, E, F та D лежать на одному колі, то $\angle BGA = \angle GAE = \angle DFG$. Звідси випливає, що описане коло трикутника FDG дотикається до BG. Нехай прямі DF та BG перетинаються у точці N. Тоді $NB^2 = ND \cdot NF = NG^2$, отже $NB = NG$. Оскільки $BG \parallel AC$ і чотирикутник $ABFE$ вписаний, то трикутники ABC, FEC та FGB подібні. Оскільки FN та AM – відповідні медіани у трикутниках FGB та ABC, то $\angle MAC = \angle NFB = \angle BAG$, що і потрібно було довести.



8. (*Яна Колісник, учениця 8 класу*) Відновіть трикутник ABC, в якому $AB < AC$, за точкою M_2, яка є серединою сторони AC, точкою N, яка є серединою дуги BAC описаного кола трикутника, та прямою l, яка містить сторону BC.

Розв'язання. I спосіб. Нехай M_1 – середина BC, а T – точка на описаному колі, для якої $NT \parallel AC$. Зауважимо, що $\smile AN = \smile TC$, а оскільки N – середина дуги $\smile BAC$, то $\smile BA + \smile AN = \smile NT + \smile TC$. Звідси $\smile BA = \smile NT$, а отже $NT = AB = 2M_1M_2$. Оскільки M_2 – середина основи AC рівнобічної трапеції $ANTC$, то $M_2N = M_2T$.

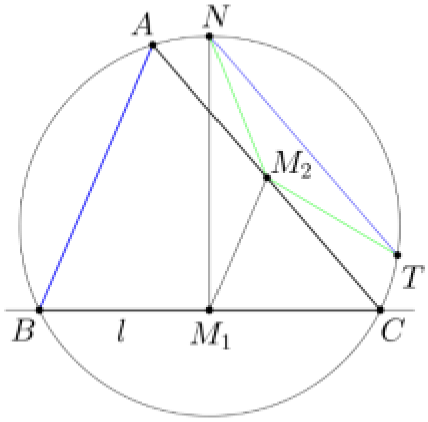
Звідси випливає така побудова:

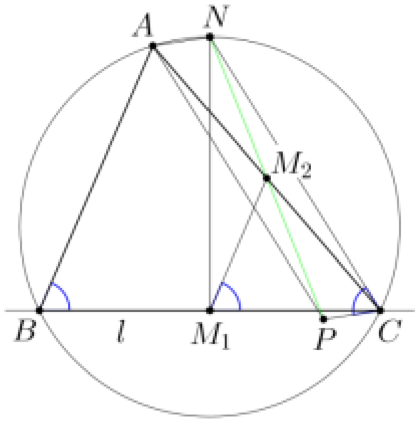
1) Будуємо точку M_1 як основу перпендикуляра з точки N на пряму l.

2) Коло з центром N і радіусом $2M_1M_2$ та коло з центром M_2 і радіусом M_2N перетинаються у точці T.

3) Пряма, яка проходить через точку M_2 паралельно до NT, перетинає пряму l у точці C.

4) Будуємо вершини A та B, симетричні до C відносно M_2 та M_1.





II спосіб. Нехай M_1 – середина BC, а P – точка на продовженні NM_2 за точку M_2, для якої $M_2P = NM_2$. Тоді $ANCP$ – паралелограм, а оскільки чотирикутник $BACN$ вписаний, то

$$\angle NCP = 180^\circ - \angle ANC = \angle ABC = \angle M_2M_1C.$$

Звідси випливає така побудова:

1) Будуємо точку M_1 як основу перпендикуляра з точки N на пряму l.

2) Відкладаємо на продовженні NM_2 відрізок $M_2P = NM_2$.

3) Будуємо на NP сегмент, який вміщує кут $\angle NCP = \angle M_2M_1C$. Цей сегмент перетинає пряму l у точці C.

4) Будуємо вершини A та B, симетричні до C відносно M_2 та M_1.

9. Про функцію $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ відомо, що $f(2f(f(n)) + m) = f(m) + 2n$ при всіх $m, n \in \mathbb{N}$. Чи обов'язково $f(2024) = 2024$?

Розв'язання. Розглянемо таку функцію:

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{якщо} \quad n \quad \text{непарне,} \\ n - 1, & \text{якщо} \quad n \quad \text{парне.} \end{cases}$$

Вона задовольняє умову, бо $f\big(f(n)\big) = n$ при всіх $n \in \mathbb{N}$, а тому

$$f\big(2f\big(f(n)\big) + m\big) = f(m) + 2n = \begin{cases} m + 2n + 1, & \text{якщо} \quad m \quad \text{непарне,} \\ m + 2n - 1, & \text{якщо} \quad m \quad \text{парне.} \end{cases}$$

При цьому $f(2024) = 2023$.

Відповідь: не обов'язково.

Зауваження. Покажемо, що умову задовольняють лише дві функції: $f(n) \equiv n$ та функція, наведена у розв'язанні. Спочатку помітимо, що функція f ін'єктивна. Справді, якщо $f(n_1) = f(n_2)$, то

$$f(m) + 2n_1 = f(2f(f(n_1)) + m) = f(2f(f(n_2)) + m) = f(m) + 2n_2,$$

тобто $n_1 = n_2$.

Індукцією за k неважко показати, що

$$f(k \cdot 2f(f(1)) + m) = f(m) + 2k = f(2f(f(k)) + m),$$

тому $f\big(f(k)\big) = kf\big(f(1)\big)$ при всіх $k \geq 1$.

Оскільки $f(f(2)) = 2f(f(1))$, то серед значень f є парні. Нехай $A = f(a)$ – найменше парне значення функції f. Тоді f набуває значення $A + 2k$, $k \geq 0$, в точках $a + 2kf(f(1))$, $k \geq 0$, причому це – всі парні значення функції f. Внаслідок ін'єктивності $f(a + 1)$ не може бути парним, тому f набуває і непарні значення. Нехай $B = f(b)$ – найменше непарне значення функції f. Тоді f набуває значення $B + 2k$, $k \geq 0$, в точках $b + 2kf(f(1))$, $k \geq 0$, причому це – всі непарні значення функції f. Отже, f набуває всі свої значення на множині $\{a + 2kf(f(1)), k \geq 0\} \cup \{b + 2kf(f(1)), k \geq 0\}$. Але f не набуває жодне значення двічі, тому

$$\{a + 2kf(f(1)), k \geq 0\} \cup \{b + 2kf(f(1)), k \geq 0\} = \mathbb{N}.$$

Звідси $a = 1$, $b = 2$ або $a = 2$, $b = 1$ та $f(f(1)) = 1$. Звідси $f(f(k)) = k$, тобто f набуває всі натуральні значення. Отже, $A = 2$ та $B = 1$. Таким чином, або $f(1+2k)=2+2k$ та $f(2+2k)=1+2k, k \geq 0$,

або $f(2+2k)=2+2k$ та $f(1+2k)=1+2k, k \geq 0$.

10. (*Георгій Жилінський, учень 10 класу*) Всередині нерівнобедреного трикутника ABC обрали точку P так, що $\angle ABP = \angle ACP$. Нехай O – центр описаного кола трикутника BCP та M – середина AP. Доведіть, що у площині трикутника існує така точка X, що $\angle XMO = 90°$ при будь-якому виборі точки P.

Розв'язання. Нехай для визначеності $\angle ABC > \angle ACB$. Тоді і $\angle PBC > \angle PCB$, причому $\angle PBC - \angle PCB = \angle ABC - \angle ACB$ за вибором точки P. Проведемо дотичну в точці A до кола ω_1, описаного навколо трикутника ABC, та дотичну в точці P до кола ω_2, описаного навколо трикутника PBC. Нехай ці дотичні перетинають продовження BC за точку B у точках X та Y відповідно. Доведемо, що точка X є шуканою.

Спочатку покажемо, що $AX \parallel PY$. Справді,

$$\angle AXB = \angle ABC - \angle XAB = \angle ABC - \angle ACB,$$
$$\angle PYB = \angle PBC - \angle YPB = \angle PBC - \angle PCB,$$

тобто $\angle AXB = \angle PYB$.

Розглянемо коло ω_2' з центром O', симетричне колу ω_2 відносно точки M. Оскільки $AX \parallel PY$, то пряма AX є спільною дотичною до кіл ω_1 та ω_2' в точці A. Таким чином, прямі AX та BC є радикальними осями кіл ω_1, ω_2' та ω_1, ω_2 відповідно. Їхня точка перетину X є радикальним центром усіх трьох кіл. Тому серединний перпендикуляр до OO', який є радикальною віссю рівних кіл ω_2 та ω_2', теж проходить через точку X. Таким чином, $\angle XMO = 90°$.