XXVI олімпіада з математики Русанівського ліцею

6 клас

I тур

1. Замість цифр Вінні-Пух використовує літери, при цьому різним цифрам відповідають різні літери, а однаковим — однакові. Виявилося, що при цьому справджується «солодка» рівність $ЖЖ + Ж = МЕД$. Якою цифрою у такому випадку закінчується добуток літер імені $В \cdot І \cdot Н \cdot Н \cdot І \cdot П \cdot У \cdot Х$? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Оскільки до двоцифрового числа ЖЖ додали одноцифрове число Ж та отримали у результаті деяке трицифрове число, то Ж може відповідати тільки цифрі 9. Тоді $МЕД = 99 + 9 = 108$. Тобто для заміни цифр 0, 1, 8 та 9 Вінні-Пух використав літери Е, М, Д та Ж. Помітимо, що жодна з цих чотирьох літер не використовується в його імені, тому серед 6 літер В, І, Н, П, У, Х точно зустрінеться та, яка відповідає 2, та літера, яка відповідає 5. Тому добуток $В \cdot І \cdot Н \cdot Н \cdot І \cdot П \cdot У \cdot Х$ ділиться націло на $2 \cdot 5 = 10$, а отже, закінчується нулем.

Відповідь: 0.

2. З опівдня до опівночі Пан Коцький гуляє лісом та розповідає казки, а з опівночі до опівдня спить. Перед входом до своєї хати він повісив плакат з написом «За годину я буду робити те саме, що робив дві години тому». Скільки годин на добу цей напис є правдивим?

Розв'язання. Напис є хибним протягом двох годин після того, як Коцький засинає, та останню годину його добового сну, тобто з 0 до 2 год ночі та з 11 до 12 год дня. Так само напис є брехнею з 12 до 14 год, коли Коцький починає розповідати казки, та з 23 до 24 год, коли завершує оповідання. Отже, напис є правильним $24 - 6 = 18$ годин на добу.

Відповідь: 18 годин.

3. Котигорошко вирушив до замку Змія. Через 12 хвилин у тому ж напрямку вирушили Крутивус та Вернидуб, бо кожен з них хотів перемогти Змія самотужки. Крутивус рухався вдвічі швидше, ніж Вернидуб. Вернидуб наздогнав Котигорошка за 12 хвилин. А Крутивус після того, як наздогнав Котигорошка, прибув до замку Змія за 1 годину 58 хвилин. Скільки часу витратив на весь шлях до Змія Крутивус?

Розв'язання. Коли Вернидуб через 12 хв наздогнав Котигорошка, той вже був у дорозі 24 хв. Тоді Вернидуб рухається вдвічі швидше Котигорошка, а отже, Крутивус швидший за нього в $2 \cdot 2 = 4$ рази. Отже, Крутивус наздожене Котигорошка через 4 хв після свого виходу (Котигорошко в цей момент буде в дорозі 16 хв). Тому Крутивус прибуде до замка Змія через 1 год 58 хв + 4 хв = 2 год 2 хв.

Відповідь: 2 год 2 хв.

4. Кожум'яка має 21 картку, на кожній з яких записано одноцифрове число: 4 картки з одиницею, 2 картки з двійкою, 7 карток з трійкою і 8 — з четвіркою. Він склав з двадцяти карток прямокутник розміром 4 × 5 так, що суми чисел у кожному стовпчику рівні між собою. При цьому і суми чисел в кожному рядку також виявилися однаковими. Яка картка залишилась у Кожум'яки?

Розв'язання. Оскільки суми чисел у кожному з 5 стовпчиків виявилися рівними, то сума всіх чисел у прямокутнику націло ділиться на 5. Враховуючи, що і в кожному з 4 рядків суми також є однаковими, сума чисел карток, з яких складається прямокутник, має ділитися націло на 4. Отже, сума всіх чисел прямокутника ділиться на $4 \cdot 5 = 20$. Помітимо, що сума чисел на 21 картці дорівнює 61. Отже, сума чисел у прямокутнику дорівнює 60, а в Кожум'яки залишилася картка з одиницею. Залишається лише навести приклад прямокутника 4 × 5, який задовольняє умовам задачі (див. рисунок).

4	**3**	**3**	**3**	**2**
3	**4**	**4**	**1**	**3**
3	**1**	**4**	**4**	**3**
2	**4**	**1**	**4**	**4**

Відповідь: з одиницею.

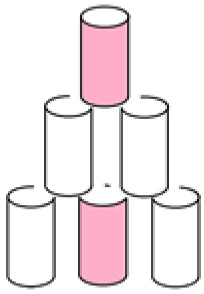
5. Лис Микита зробив про деяке двоцифрове число три твердження: «Це число закінчується на 5 або кратне 7», «Це число більше 20 або має дев'ятку останньою цифрою», «Це число ділиться націло на 12 або менше від 21». Про яке число говорив хитрий Лис Микита? Визначте усі можливі варіанти.

Розв'язання. Якщо припустити, що число закінчується на 5, то воно не може мати 9 останньою цифрою, тож має бути більшим за 20. Тоді воно не менше 21, тому має ділитися націло на 12. Але число, яке закінчується п'ятіркою, не може бути кратним 12, бо є непарним. Отже, шукане число кратне 7. Якби при цьому воно було меншим від 21, то Лис міг би мати на увазі двоцифрове число 14. Однак це число не задовольняє жодній частині другого твердження. Тож потрібне число має ділитися на 12. 84 — єдине двоцифрове число, яке одночасно ділиться на 7 та 12. При цьому воно більше 20, а отже, задовольняє і друге твердження.

Відповідь: 84.

II тур

6. (*Десятерик О.О.*) На рисунку зображено 6 циліндрів, які стоять у вигляді трикутника. Основою цього трикутника є найнижчий ряд, який складається з 3 циліндрів. Помітимо, що при цьому лише для одного циліндра можна знайти інший циліндр, який стоїть рівно над ним. Нехай тепер деяку кількість циліндрів поставили трикутничком за тим самим принципом, розташувавши в основі 2023 циліндри. Скільки тепер знайдеться циліндрів, для яких існує хоча б один інший, який стоїть рівно над ним? (Циліндром, який стоїть рівно над даним, вважається тільки той циліндр, який стоїть вище та має з ним спільну вісь, тобто не зсунутий ані на міліметр вправо, вліво, вперед чи назад.)



Розв'язання. Помітимо, що умову задовольнятимуть всі циліндри, окрім тих, які розташовані вздовж бічних сторін трикутничка. Тому шуканих циліндрів буде 2021 у найнижчому ряду, 2020 у наступному ряду вище, 2019 далі і т.д. до 1. Отже, всього таких циліндрів знайдеться $2021 + 2020 + \cdots + 1 = \frac{2021 \cdot (2021+1)}{2} = 2\,043\,231.$

Відповідь: сума послідовних натуральних чисел від 1 до 2021, яка дорівнює 2 043 231.

7. Площину розфарбували в чотири кольори. Доведіть, що за будь-якого розфарбування обов'язково знайдеться пряма, яка містить принаймні три точки, які матимуть різний колір.

Розв'язання. Розглянемо чотири точки різних кольорів. Якщо три з них лежать на одній прямій, то це і є потрібна пряма. Якщо жодні три не лежать на одній прямій, то вони утворюють чотирикутник. Розглянемо точку перетину прямих, які містять діагоналі цього чотирикутника. Якого б кольору не виявилася ця точка, одна з діагоналей буде утворювати шукану пряму.

8. 26 різних вантажівок наповнили кавунами. Відомо, що у кожній з них непарна кількість кавунів: у найменшій вантажівці 165 кавунів, у наступній за величиною 167, у кожній наступній на два кавуни більше, ніж у попередній. Було отримано замовлення від п'яти мереж супермаркетів, кожна з яких очікує отримати не більше 1000 кавунів. Чи вийде розподілити всі 26 вантажівок серед них, не переміщуючи кавуни між вантажівками?

Розв'язання. Сумарна кількість кавунів у 26 вантажівках дорівнює $165 + 167 + \cdots + 215 = 4940 < 5000$, тож здається, що це реалізувати можна. Однак помітимо, що хоча б одній мережі необхідно буде відправити принаймні 6 вантажівок. А кількість кавунів у 6 найменших вантажівках дорівнює $165 + 167 + \cdots + 175 = 1020 > 1000$. Отже, розподілити всі 26 вантажівок не вийде.

Відповідь: ні, не вийде.

III тур

9. Автобус вважається переповненим, якщо у ньому понад 100 пасажирів. У певний момент часу на маршруті знаходиться деяка кількість автобусів, серед яких є переповнені. Що виявиться більшим — відсоток переповнених автобусів чи відсоток пасажирів, які їдуть переповненими автобусами в цей момент?

Розв'язання. Пофарбуємо переповнені автобуси у червоний колір. У кожному автобусі на маршруті змінимо (зменшимо чи збільшимо) кількість пасажирів так, щоб їх стало рівно 100. Тепер у кожному автобусі виявиться однакова кількість пасажирів, тому відсоток червоних автобусів дорівнюватиме відсотку пасажирів, які у них знаходяться. Але при цьому кількість пасажирів у червоних автобусах ставала меншою, бо нам доводилося звідти «висаджувати» пасажирів, у не червоних — навпаки, збільшувалася. Тож відношення кількості пасажирів у червоних автобусах до числа людей у не червоних стало меншим, ніж було раніше. Тому і відношення (у тому числі відсоткове) кількості пасажирів червоних автобусів до загальної кількості пасажирів в усіх автобусах зменшилося. Отже, відсоток пасажирів червоних автобусів початково був більшим.

Відповідь: відсоток пасажирів більший.

XXVI олімпіада з математики Русанівського ліцею

7 клас

Перший тур

1. В будинках А та Б разом 255 мешканців. Кожний мешканець будинку А знайомий з 8 мешканцями будинку Б, а кожний мешканець будинку Б – з 9 мешканцями будинку А. Скільки мешканців у кожному будинку?

Розв'язання. Нехай у будинку А проживає a мешканців, а у будинку Б – b мешканців. Тоді кількість знайомств між мешканцями будинків дорівнює $8a = 9b$, тобто $a:b = 9:8$. Отже, на кожних 9 мешканців будинку А припадає 8 мешканців будинку Б, а тому у будинку А проживає $\frac{9}{17} \cdot 255 = 135$ мешканців, а у будинку Б – $\frac{8}{17} \cdot 255 = 120$ мешканців.

Відповідь: 135 та 120 мешканців.

2. Мультфільм показували цілу кількість хвилин. У програмі передач для запису часу початку і часу кінця показу було використано 8 різних цифр. Який найменший час міг демонструватися мультфільм?

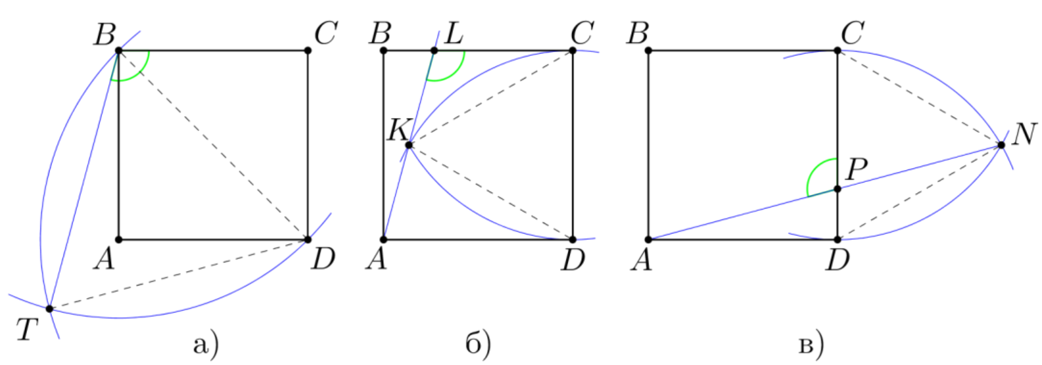
Розв'язання. Припустимо, що мультфільм йшов менше години. Тоді його почали і завершили показувати протягом двох послідовних годин. Дві послідовні години записуються чотирма різними цифрами лише в одному випадку: 19 і 20. Отже, для запису годин мали використати саме цифри 0, 1, 2 та 9. Найменша кількість хвилин без перелічених цифр – 34, а найбільша – 58, тому показ розпочався не пізніше за 19:58 і завершився не раніше за 20:34.

Відповідь: 36 хвилин (з 19:58 до 20:34).

3. (*Григорій Філіпповський*) Дано квадрат $ABCD$. За допомогою не більше ніж трьох ліній (лінія – це пряма або коло) побудуйте кут, який дорівнює $105°$.

Розв'язання. I спосіб. Проведемо перші дві лінії – кола з центрами B і D та радіусом BD. Нехай T – точка перетину цих кіл, яка знаходиться з A по одну сторону від BD (рис. а). Третя лінія – пряма BT. Оскільки трикутник BDT рівносторонній, а трикутник BCD рівнобедрений і прямокутний, то $\angle TBC = \angle TBD + \angle DBC = 60° + 45° = 105°$.

II спосіб. Перші дві лінії – кола з центрами C і D та радіусом CD. Нехай ці кола перетинаються у точці K, яка знаходиться всередині квадрата, а третя лінія – пряма AK – перетинає сторону BC у точці L (рис. б). Тоді трикутник CKD рівносторонній, а трикутник AKD рівнобедрений з кутом $\angle ADK = 90° - 60° = 30°$ при вершині. Кут при основі цього трикутника $\angle KAD = 75°$, а тому $\angle ALC = 180° - 75° = 105°$ (внутрішні односторонні кути).



а) б) в)

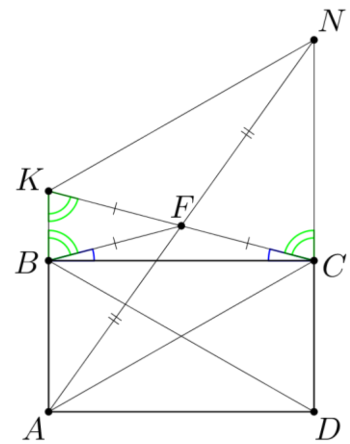
III спосіб. Перші дві лінії – знову кола з центрами C і D та радіусом CD. Нехай ці кола перетинаються зовні квадрата у точці N, а третя лінія – пряма AN – перетинає сторону CD у точці P (рис. в). Трикутник CND рівносторонній, а трикутник ADN рівнобедрений з кутом $\angle ADN = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ при вершині. Кут при основі цього трикутника $\angle NAD = 15^\circ$, а тому $\angle APC = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$ (зовнішній кут прямокутного трикутника ADP).

4. Знайдіть усі трійки простих натуральних чисел p, q, r таких, що $p + q^2 = r^4$.

Розв'язання. I спосіб. Оскільки $p = r^4 - q^2 = (r^2 - q)(r^2 + q)$ просте, то $r^2 - q = 1$. Так само $q = r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$ просте, тому $r - 1 = 1$, звідки послідовно дістаємо $r = 2, q = 3$ та $p = 7$.

II спосіб. Якщо усі числа p, q, r непарні, то ліва частина рівняння парна, а права ні. Якщо жодне з чисел q, r не дорівнює 3, то числа q^2 та r^4 при діленні на 3 дають остачу 1, а тому $p = r^4 - q^2$ ділиться на 3, тобто $p = 3$. Отже, серед чисел p, q, r точно є 2 та 3. Залишається всіма способами підставити 2 та 3 замість деяких двох змінних і подивитися, у яких випадках третя змінна виявиться простим натуральним числом.

Відповідь: $p = 7, q = 3, r = 2$.



5. *(Михайло Сидоренко, учень 8 класу)* На стороні BC прямокутника $ABCD$ зовні від цього прямокутника побудовано рівнобедрений трикутник BFC ($BF = CF$). Промінь CF перетинає пряму AB у точці K, а промінь AF перетинає пряму CD у точці N. Доведіть, що $KN = BD$.

Розв'язання. Нехай $\angle FBC = \angle FCB = \alpha$. Тоді $\angle KBF = \angle NCF = \angle BKC = 90^\circ - \alpha$. Звідси трикутник BFK рівнобедрений та $FK = FB = FC$. Оскільки $\angle NFC = \angle AFK$ як вертикальні, то трикутники NCF та AKF рівні за стороною і двома прилеглими кутами. Тому $AF = FN$. Тепер трикутники KFN та CFA рівні за двома сторонами і кутом між ними. Звідси $KN = AC$. Залишилося помітити, що $AC = BD$, бо прямокутні трикутники ABD та DCA рівні за двома катетами.

Другий тур

6. На першій зустрічі делегацій Марса та Венери з'ясувалося, що загалом на всіх руках у кожного марсіанина 20 пальців, а у кожного венеріанця – менша кількість, але більша, ніж у землян. Венеріанців було на 6 більше, ніж марсіан, але загальна кількість пальців на руках у всіх венеріанців виявилась на 1 меншою. Скільки всього було учасників зустрічі?

Розв'язання. Нехай на зустрічі було x марсіан та $x + 6$ венеріанців, а на руках венеріанця y пальців. Тоді $20x - 1 = (x + 6)y$ та $y = \frac{20x-1}{x+6} = 20 - \frac{121}{x+6}$. Це число є цілим, тому $121 = 11^2$ ділиться на $x + 6$. Звідси $x + 6 = 11$ або $x + 6 = 121$. При $x + 6 = 11$ дістаємо $y = 9$, а при $x + 6 = 121$ – що $y = 19$. Перший варіант суперечить умові, тому $x + 6 = 121, x = 115$ та на зустрічі було 236 учасників.

Відповідь: 236 учасників.

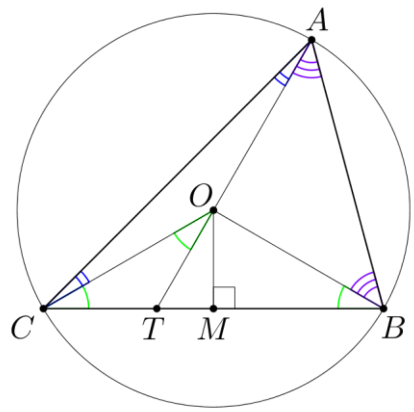
7. *(Григорій Філіпповський)* Точка O – центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. Промінь AO перетинає сторону BC у точці T. Відомо, що $BT = 2OT = 2CT$. Знайдіть усі кути трикутника ABC.

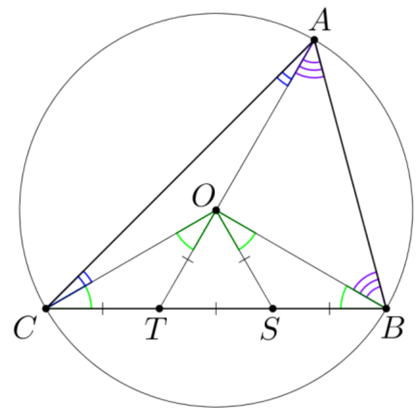
Розв'язання. I спосіб. Нехай M – середина BC. Якщо $OT = CT = x$ і $BT = 2x$, то

$BC = 3x$, $CM = \frac{3}{2}x$ та $TM = CM - CT = \frac{1}{2}x$. У прямокутному трикутнику OTM катет TM дорівнює половині гіпотенузи, отже $\angle OTM = 60°$. Цей кут є зовнішнім кутом при вершині рівнобедреного трикутника COT, отже $\angle TCO = \angle TOC = 30°$.

З рівнобедреного трикутника COB з кутом при основі $30°$ знаходимо $\angle BOC = 120°$, відповідно $\angle BOT = \angle BOC - \angle COT = 90°$. Кут $\angle COT = 30°$ є зовнішнім кутом при вершині рівнобедреного трикутника AOC, отже $\angle OAC = \angle OCA = 15°$. Кут $\angle BOT = 90°$ є зовнішнім кутом при вершині рівнобедреного трикутника AOB, отже $\angle OAB = \angle OBA = 45°$. Звідси кути трикутника ABC є такими:

$\angle A = 15° + 45° = 60°$, $\angle B = 30° + 45° = 75°$, $\angle C = 30° + 15° = 45°$.

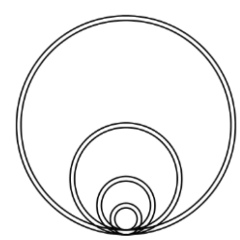




II спосіб. Нехай S – середина BT. Тоді $BS = ST = OT = CT$. Трикутник BOC рівнобедрений ($OB = OC$ як радіуси), тому $\angle BOS = \angle COT$, а отже трикутники BOS та COT рівні за двома сторонами і кутом між ними. Тому $OS = OT = ST$ і трикутник SOT рівносторонній. Звідси $\angle OTS = 60°$ і далі розв'язання завершується, як у I способі.

Відповідь: $\angle A = 60°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 45°$.

8. На стадіоні є чотири бігові доріжки у формі кіл довжиною 50, 100, 200 та 400 метрів, які дотикаються у спільній точці. Заєць і вовк бігають по колах кожен зі своєю постійною швидкістю. Кожен з них бігає по колах у такому порядку: $50 – 100 – 200 – 400 – 50 – 100 – 200 – 400 – \cdots$, але вони почали бігати не одночасно і заєць завжди біжить по колах проти годинникової стрілки, а вовк – за годинниковою стрілкою. Чи обов'язково вони зустрінуться?

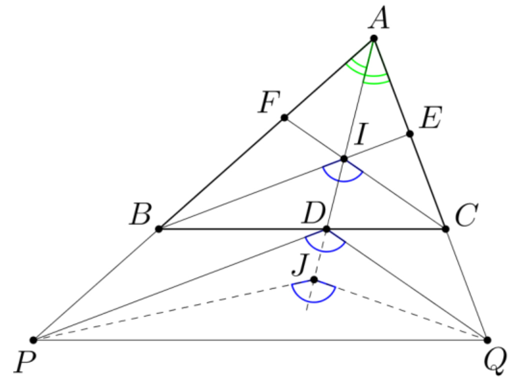


Розв'язання. Якщо в якийсь момент часу заєць і вовк знаходяться на одному колі, вони неодмінно зустрінуться, бо рухаються назустріч один одному. Нехай для визначеності вовк бігає зі швидкістю, не більшою за швидкість зайця. Розглянемо момент, коли вовк починає бігти по великому колу довжиною 400 м. Заєць у цей момент знаходиться на одному з інших кіл. Оскільки $50 + 100 + 200 < 400$ і заєць бігає не повільніше за вовка, він почне бігати по великому колу, коли вовк ще бігтиме по цьому колу. Тому вони точно зустрінуться.

Відповідь: так.

Третій тур

9. *(Олексій Карлюченко)* Нехай AD, BE та CF – бісектриси трикутника ABC. На продовженнях сторін AB та AC відмітили такі точки P та Q відповідно, що $PD || BE$ та $QD || CF$. Доведіть, що D – центр кола, вписаного у трикутник APQ.



Розв'язання. Нехай I та J – центри кіл, вписаних у трикутники ABC та APQ. Усі точки I, J та D лежать на бісектрисі кута A. Кути між бісектрисами трикутників дорівнюють $\angle BIC = 90° + \frac{A}{2}$ та $\angle PJQ = 90° + \frac{A}{2}$, а також $\angle PDQ = \angle BIC = \angle 90° + \frac{A}{2}$, бо відповідні сторони цих кутів паралельні. Припустимо, що $AJ > AD$. Тоді кут $\angle PJQ$ дорівнює сумі зовнішніх кутів трикутників PJD та QJD при вершині J, звідки $\angle PJQ > \angle PDQ$, суперечність. Аналогічно дістаємо суперечність при $AD > AJ$, тому насправді точки D та J збігаються.

10. Уздовж берега озера ростуть кокосові пальми. Пітер та Венді вирішили обійти навколо озера і порахувати пальми, а також усі кокоси на пальмах. Вони вирушили з точки A у протилежних напрямках, вперше зустрілися у точці B і порівняли результати. Виявилося, що Пітер нарахував удвічі більше пальм і в сім разів більше кокосів, ніж Венді. Вони продовжили йти у тих самих напрямках і зустрілися вдруге у точці C. Виявилося, що від B до C Пітер знову нарахував удвічі більше пальм і в сім разів більше кокосів, ніж Венді. Вони продовжили йти у тих самих напрямках і зустрілися втретє у точці D. Від C до D Пітер знову нарахував удвічі більше пальм, ніж Венді. Хто на шляху від C до D нарахував більше кокосів і у скільки разів?

Розв'язання. Нехай уздовж берега росте n пальм. На шляху від A до B Пітер нарахував удвічі більше пальм, ніж Венді, а разом вони порахували всі пальми. Отже, Пітер нарахував $\frac{2n}{3}$ пальм, а Венді нарахувала $\frac{n}{3}$ пальм. Те саме повторилося на шляху від B до C та від C до D. Тому за весь час подорожі Пітер нарахував $2n$ пальм, а Венді n пальм. Таким чином, за весь час Пітер порахував усі пальми двічі, а Венді порахувала всі пальми по одному разу.

Нехай на всіх пальмах росте k кокосів. На шляху від A до B Пітер нарахував у сім разів більше кокосів, ніж Венді, а разом вони порахували всі кокоси. Отже, Пітер нарахував $\frac{7k}{8}$ кокосів, а Венді нарахувала $\frac{k}{8}$ кокосів. Те саме повторилося на шляху від B до C, тобто Пітер знову нарахував $\frac{7k}{8}$ кокосів, а Венді – $\frac{k}{8}$ кокосів. Але за весь час подорожі Пітер нарахував $2k$ кокосів, а Венді – k кокосів. Тому на шляху від C до D Пітер нарахував $2k - \frac{7k}{8} - \frac{7k}{8} = \frac{k}{4}$ кокосів, а Венді нарахувала $k - \frac{k}{8} - \frac{k}{8} = \frac{3k}{4}$ кокосів, тобто утричі більше за Пітера.

Відповідь: На шляху від C до D Венді нарахувала утричі більше кокосів, ніж Пітер.

XXVI олімпіада з математики Русанівського ліцею м. Києва (2023)

Командна олімпіада, 8–9 класи.

Розв'язання задач

1. *(Олег Черкаський)* Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторін BC, AC і AB у точках K_1, K_2 і K_3. Позначимо точки, у яких промені K_1I, K_2I та K_3I перетинають сторони і продовження сторін трикутника ABC, як показано на рис. 1. Доведіть, що $N_1P_1 = N_2P_2 + N_3P_3$.

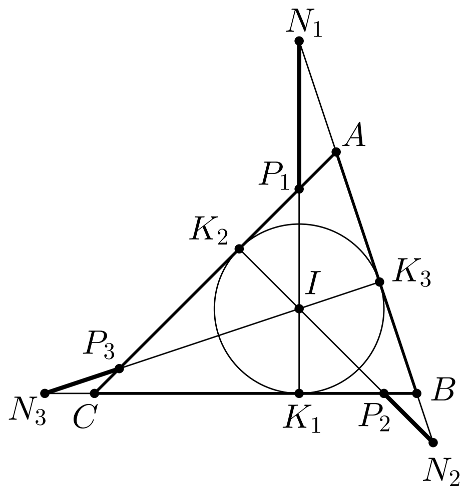


Рис. 1.

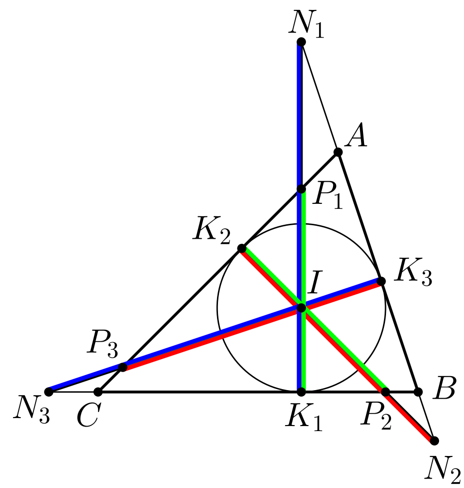


Рис. 2.

Розв'язання. Прямокутні трикутники AK_2N_2 та AK_3P_3 рівні (кут при вершині A спільний, $AK_2 = AK_3$ як дотичні), тому $K_2N_2 = K_3P_3$. Аналогічно з рівності трикутників BK_1N_1 та BK_3N_3 дістаємо, що $K_1N_1 = K_3N_3$, а з рівності трикутників CK_1P_1 та CK_2P_2 — що $K_1P_1 = K_2P_2$. Позначимо довжини рівних червоних, синіх та зелених відрізків на рис. 2 таким чином:

$$K_2N_2 = K_3P_3 = u, \quad K_1N_1 = K_3N_3 = v, \quad K_1P_1 = K_2P_2 = w.$$

Тоді $N_1P_1 = v - w$ та $N_2P_2 + N_3P_3 = (u - w) + (v - u) = v - w = N_1P_1$.

2. Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два натуральні корені, причому a, b, c цілі та $a + b + c$ є простим числом. Знайдіть хоча б один з коренів цього рівняння.

Розв'язання. Нехай рівняння має корені x_1 та x_2. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ та $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, тому $a + b + c = a - (x_1 + x_2)a + x_1x_2a = a(x_1 - 1)(x_2 - 1)$. Оскільки a ціле, а $x_1 - 1$ та $x_2 - 1$ цілі невід'ємні, добуток цих чисел може бути простим лише при $x_1 - 1 = 1$ або $x_2 - 1 = 1$, тобто $x_1 = 2$ або $x_2 = 2$.

Відповідь: 2.

3. *(Олександр Шамович)* Нехай M_1 та M_2 — середини катетів BC та AC прямокутного трикутника ABC. Зовнівписані кола дотикаються до сторін BC та AC у точках T_1 та T_2. Доведіть, що відрізки M_1T_2 та M_2T_1 перетинаються на бісектрисі кута ACB.

Розв'язання. (*I спосіб*) Покажемо, що відрізки M_1T_2 та M_2T_1 перетинаються у точці I — центрі вписаного кола трикутника ABC.

Нехай K_1 та K_2 — точки дотику вписаного кола зі сторонами BC та AC (рис. 3). Доведемо, що прямокутні трикутники M_1K_1I та IK_2T_2 подібні. Звідси випливатиме, що $M_1 - I - T_2$ — одна пряма.

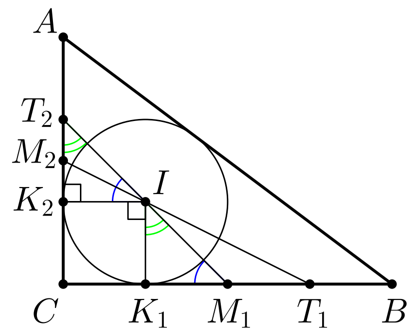


Рис. 3.

Покладемо $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тоді $IK_1 = IK_2 = \frac{a+b-c}{2}$, $K_1M_1 = \frac{c-b}{2}$, $K_2T_2 = 2K_2M_2 = c - a$ і достатньо перевірити, що $\frac{IK_1}{K_1M_1} = \frac{T_2K_2}{K_2I}$, тобто $\frac{a+b-c}{c-b} = \frac{2(c-a)}{a+b-c}$. Маємо

$$(a + b - c)^2 = 2(c - a)(c - b),$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 2c^2 - 2ac - 2bc + 2ab,$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Отже, M_1T_2 проходить через точку I та аналогічно M_2T_1 проходить через точку I.

(II спосіб) Нехай CL' — бісектриса трикутника CM_1T_2 та CL'' — бісектриса трикутника CM_2T_1. Достатньо довести, що $CL' = CL''$, тобто точки L' та L'' збігаються. За формулою довжини бісектриси

$$CL' = \frac{\sqrt{2}\,CM_1 \cdot CT_2}{CM_1+CT_2}, \quad CL'' = \frac{\sqrt{2}\,CM_2 \cdot CT_1}{CM_2+CT_1}.$$

Нехай $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тоді $CM_1 = \frac{a}{2}$, $CM_2 = \frac{b}{2}$, $CT_1 = \frac{a+c-b}{2}$, $CT_2 = \frac{b+c-a}{2}$. Тому $CM_1 + CT_2 = \frac{b+c}{2}$, $CM_2 + CT_1 = \frac{a+c}{2}$ і достатньо перевірити, що

$$\frac{a(b+c-a)}{b+c} = \frac{b(a+c-b)}{a+c}, \quad \text{або} \quad a - \frac{a^2}{b+c} = b - \frac{b^2}{a+c}.$$

Залишається помітити, що $a - \frac{a^2}{b+c} = a - \frac{c^2-b^2}{b+c} = a - c + b$ та $b - \frac{b^2}{a+c} = b - \frac{c^2-a^2}{a+c} = b - c + a$.

4. Петрик написав на дошці число 2,
потім найменше число з цифрою 0, яке є більшим за попереднє,
потім найменше число з цифрою 2, яке є більшим за попереднє,
потім найменше число з цифрою 3, яке є більшим за попереднє,

і так далі (цифра, яка має зустрітися у наступному числі, змінюється за правилом $2-0-2-3-2-0-2-3-\ldots$; декілька перших чисел це $2, 10, 12, 13, 20, 30, 32, 33, \ldots$). Чи з'явиться на дошці число 2023?

Розв'язання. (I спосіб) Нехай N — номер першого числа на дошці, яке не менше за 2020. Якщо $N = 4k + 1$, то це число 2020 з цифрою 2, наступне число з цифрою 0 це 2021, наступне число з цифрою 2 це 2022 і наступне число з цифрою 3 це 2023. Якщо $N = 4k + 2$, то це число 2020 з цифрою 0, наступне число з цифрою 2 це 2021 і наступне число з цифрою 3 це 2023. Якщо $N = 4k + 3$, то це число 2020 з цифрою 2, а наступне число з цифрою 3 це 2023. Якщо ж $N = 4k$, то це число 2023 з цифрою 3. Таким чином, на дошці неодмінно з'явиться число 2023.

(II спосіб) Припустимо, що одразу після числа $X < 2023$ з'явилося число $Y > 2023$, яке містить шукану цифру a (2, 0 або 3). Але число 2023 теж містить цифру a, тобто Y не може бути найменшим числом з цифрою a, більшим за X, суперечність.

Відповідь: так.

5. *(Володимир Точоний)* Нехай O та H — центр описаного кола та точка перетину висот трикутника ABC, AL_1 — бісектриса цього трикутника. Відомо, що L_1 — середина OH. Знайдіть кути трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай AM_1 та AH_1 — медіана та висота трикутника. Оскільки L_1 — середина OH, то точки O та H лежать по різні сторони від BC, а тому трикутник ABC тупокутний. Прямокутні трикутники OM_1L_1 та HH_1L_1 рівні ($OL_1 = HL_1$, $\angle OL_1M_1 = \angle HL_1H_1$ як вертикальні), тому $HH_1 = OM_1$. Якщо $\angle A > 90°$, то H лежить на продовженні AH_1 за точку A та $HH_1 > AH = 2OM_1$, суперечність. Надалі нехай для визначеності $\angle B > 90°$ (рис. 4). Точки O та A лежать по один бік від BC, а точка H по інший бік. Тому з $AH = 2OM_1$ та $OM_1 = HH_1$ випливає, що також $AH_1 = OM_1$, звідки OAH_1M_1 прямокутник. Добре відомо, що AL_1 є бісектрисою кута OAH, отже $\angle L_1AH_1 = \frac{1}{2}\angle OAH = 45°$. Тому $AH_1 = L_1H_1 = \frac{1}{2}M_1H_1$, тобто $OM_1 = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$. Але $OM_1 = R\cos\angle A$, отже $\cos\angle A = \frac{1}{2}$ та $\angle A = 60°$. Тепер $\angle C = \angle OAC = \frac{1}{2}(\angle OAH - \angle A) = 15°$ та $\angle B = 105°$.

Відповідь: $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$, $\angle C = 15°$ або $\angle A = 60°$, $\angle B = 15°$, $\angle C = 105°$.

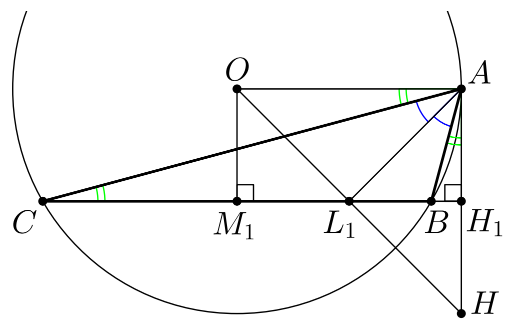


Рис. 4.

6. *(Олександр Толесніков)* Є три однакові справжні монети і дві однакові фальшиві монети, фальшива монета легша за справжню. На безкомпромісних терезах ніколи не буває рівноваги (замість рівноваги терези показують, що переважила випадкова шалька). За яку найменшу кількість зважувань на цих терезах можна гарантовано знайти обидві фальшиві монети?

Розв'язання. Спочатку фальшивими можуть виявитися будь-які дві з п'яти монет — усього 10 варіантів. Під час будь-якого зважування одному з двох можливих результатів відповідає не менше половини наявних варіантів. Тому після трьох зважувань у несприятливому випадку залишиться більше одного варіанта, тобто трьох зважувань може виявитися недостатньо.

Покажемо, як знайти фальшиві монети за чотири зважування. Покладемо на шальки терезів по дві монети. На тій шальці, яка виявиться легшою, хоча б одна з двох монет фальшива (якщо це не так, то дві справжні монети важать не більше, ніж дві інші монети, тобто справжніх монет принаймні чотири, суперечність). Тепер порівняємо ці дві монети. Та з них, що виявиться легшою, гарантовано фальшива. Залишилося три справжні і одна фальшива монета. Покладемо їх по дві на шальки терезів. На тій шальці, яка виявиться легшою, лежать справжня і фальшива монети. Останнім зважуванням порівняємо ці дві монети і знайдемо другу фальшиву монету.

7. Чи правда, що для довільного натурального $x \geq 2$ існує таке натуральне $y > x$, що $y^7 + x$ ділиться на $x^7 + y$?

Розв'язання. Покладемо $y = x^8 - x^7 - 1$. Оскільки $x \geq 2$, то

$$y = (x-1)x^7 - 1 \geq x^7 - 1 > 2x - 1 > x.$$

Далі, $x^7 + y = x^8 - 1$ та $y^7 + x = (x^8 - x^7 - 1)^7 + x$ дає таку ж остачу при діленні на $x^8 - 1$, як $(-x^7)^7 + x = -x(x^{48} - 1) = -x(x^8 - 1)(x^{40} + x^{32} + \ldots + x^8 + 1)$. Отже, $y^7 + x$ ділиться на $x^7 + y$.

Відповідь: так.

Зауваження. Як придумати шуканий приклад? Нехай $x^7 + y = n$. Тоді y при діленні на n дає таку ж остачу, як $-x^7$, а $y^7 + x$ — таку ж остачу, як $(-x^7)^7 + x = -x^{49} + x$. Тому слід обрати y так, аби $x^7 + y$ було дільником $x^{49} - x$. Наприклад, взяти $y = x^8 - x^7 - 1$ або $y = x^{49} - x^7 - x$.

8. *(Матвій Курський)* Нехай O та H — центр описаного кола та точка перетину висот гострокутного трикутника ABC, AD — висота цього трикутника. На стороні BC відмітили такі точки E та F, що O є центром кола, вписаного у трикутник AEF. Виявилося, що $EF = BE + CF$. Доведіть, що H є серединою AD.

Розв'язання. (*I спосіб*) Нехай промені AE і AF вдруге перетинають описане коло трикутника ABC у точках P і Q та AS — діаметр цього кола (рис. 5). Покажемо, що S є центром зовнівписаного кола трикутника AEF, яке дотикається до сторони EF. Зрозуміло, що хорди AP і CB симетричні відносно OE, тому $AP = BC$ та $BE = EP$. Аналогічно $AQ = BC$ та $CF = FQ$. Тому периметр трикутника AEF дорівнює

$$AE + AF + EF = (AE + BE) + (AF + CF) = AP + AQ$$

та $AP = AQ$. Отже, зовнівписане коло трикутника AEF дотикається до продовжень сторін AE та AF саме у точках P і Q, а тому його центром є точка S.

Нехай T — точка дотику зовнівписаного кола зі стороною EF та M — середина BC. Оскільки T, M, D — проекції S, O, A на BC і O — середина AS, то M — середина DT. Кола з центрами O, S і радіусами OM, ST вписані у кут EAF та $AS = 2\,AO$, тому $ST = 2\,OM$. Оскільки $AH = 2\,OM$ то OM — середня лінія у трикутнику SAH та M — середина SH. Тоді $STHD$ паралелограм та

$$HD = ST = 2\,OM = AH,$$

що завершує доведення.

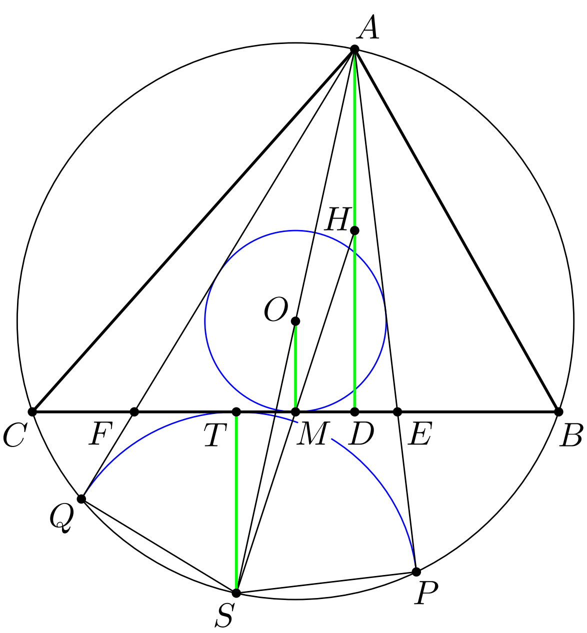


Рис. 5.

(*II спосіб*) Оскільки $AH = 2\,OM$, достатньо довести, що $AD = 4\,OM$. Так само, як у I способі, дістаємо, що периметр трикутника AEF дорівнює $AP + AQ = 2BC$. Також $S_{ABC} = 2S_{AEF}$, бо трикутники мають спільну висоту та $BC = 2EF$. Тому радіус вписаного у трикутник AEF кола дорівнює

$$OM = \frac{2S_{AEF}}{2BC} = \frac{S_{ABC}}{2BC} = \frac{AD}{4}.$$

9. *(Володимир Брайман)* Всередині трикутника ABC відмітили довільну точку G. Нехай D, E та F — середини дуг BGC, AGC та AGB відповідно. Доведіть, що точки D, E, F, G лежать на одному колі.

Розв'язання. (*I спосіб*) Нехай прямі, які проходять через точки A, B, C перпендикулярно до AG, BG та CG, утворюють у перетині трикутник $A_0B_0C_0$ (рис. 6), та I — точка перетину бісектрис цього трикутника. Покажемо, що точки D, E, F лежать на колі з діаметром IG. Справді, дуга BGC є частиною кола з діаметром A_0G, а бісектриса A_0I проходить через середину цієї дуги — точку D. Тому $\angle IDG = \angle A_0DG = 90°$. Аналогічно $\angle IEG = \angle IFG = 90°$.

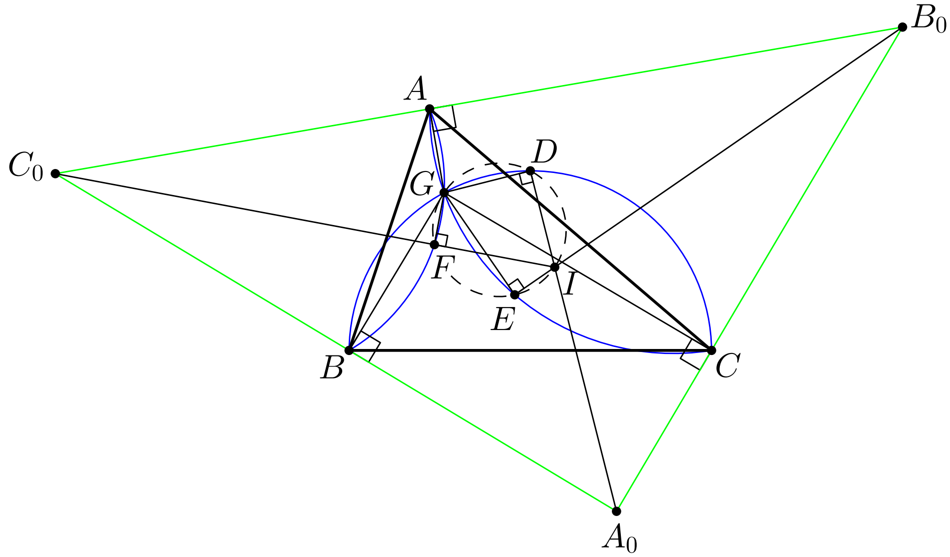


Рис. 6.

(*II спосіб*) Розглянемо інверсію відносно будь-якого кола з центром G. При цій інверсії точки D, E та F перейдуть у точки D', E' та F', в яких зовнішні бісектриси кутів $B'GC'$, $A'GC'$ та $A'GB'$ перетинають прямі $B'C'$, $A'C'$ та $A'B'$ відповідно (рис. 7). Тому за властивістю зовнішньої бісектриси

$$\frac{B'D'}{D'C'} \cdot \frac{C'E'}{E'A'} \cdot \frac{A'F'}{F'B'} = \frac{B'G}{GC'} \cdot \frac{C'G}{GA'} \cdot \frac{A'G}{GB'} = 1,$$

а отже за теоремою Менелая $D' - E' - F'$ — одна пряма. Ця пряма перетинає продовження всіх сторін трикутника $A'B'C'$, а тому не може проходити через точку G, яка знаходиться всередині цього трикутника. Звідси точки D, E, F, G лежать на одному колі.

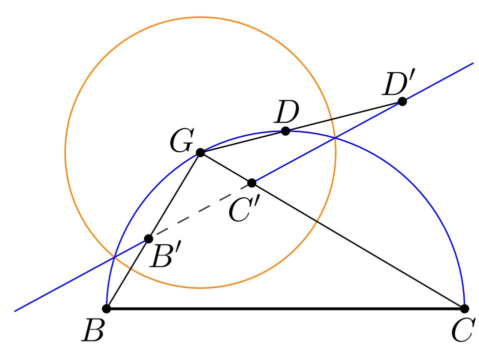


Рис. 7.

10. *(Юхим Рабінович)* Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}-\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-7}}+\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-7}} = 2.$$

Розв'язання. Маємо

$$\left(\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}\right)^2 =$$
$$= \sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}+2\sqrt{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}+\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} =$$
$$= 2\sqrt{x+2}+2\sqrt{(x+2)-(x+1)} = 2\sqrt{x+2}+2,$$

аналогічно $\left(\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-7}}-\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-7}}\right)^2 = 2\sqrt{x+2}-6$.

Тому рівняння можна переписати у вигляді $\sqrt{2\sqrt{x+2}+2}-\sqrt{2\sqrt{x+2}-6} = 2$, або $\sqrt{y+2}-\sqrt{y-6} = 2$, де $y = 2\sqrt{x+2}$. Звідси

$$\sqrt{y+2} = \sqrt{y-6}+2, \quad y+2 = y-6+4\sqrt{y-6}+4, \quad 4\sqrt{y-6} = 4, \quad y = 7,$$

$2\sqrt{x+2} = 7$ та остаточно $x = \frac{41}{2}$.

Відповідь: $x = \frac{41}{2}$.