XXVI олімпіада з математики Русанівського ліцею

7 КЛАС

Перший тур

1. В будинках А та Б разом 255 мешканців. Кожний мешканець будинку А знайомий з 8 мешканцями будинку Б, а кожний мешканець будинку Б – з 9 мешканцями будинку А. Скільки мешканців у кожному будинку?

Розв'язання. Нехай у будинку А проживає a мешканців, а у будинку Б – b мешканців. Тоді кількість знайомств між мешканцями будинків дорівнює $8a = 9b$, тобто $a : b = 9 : 8$. Отже, на кожних 9 мешканців будинку А припадає 8 мешканців будинку Б, а тому у будинку А проживає $\frac{9}{17} \cdot 255 = 135$ мешканців, а у будинку Б – $\frac{8}{17} \cdot 255 = 120$ мешканців.

Відповідь: 135 та 120 мешканців.

2. Мультфільм показували цілу кількість хвилин. У програмі передач для запису часу початку і часу кінця показу було використано 8 різних цифр. Який найменший час міг демонструватися мультфільм?

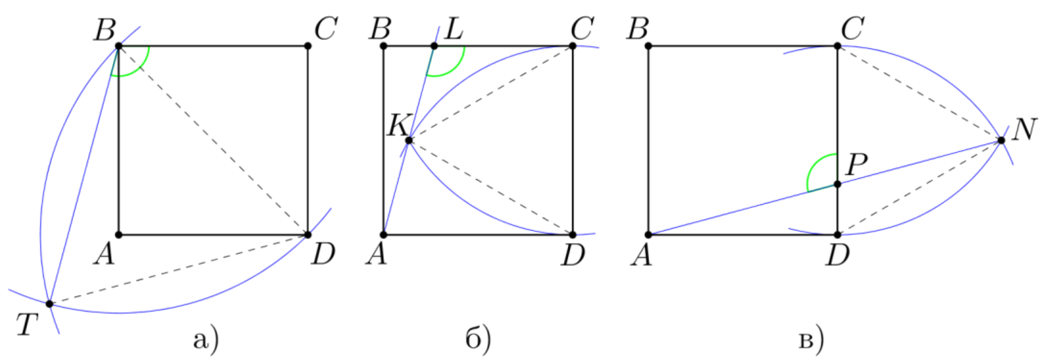
Розв'язання. Припустимо, що мультфільм йшов менше години. Тоді його почали і завершили показувати протягом двох послідовних годин. Дві послідовні години записуються чотирма різними цифрами лише в одному випадку: 19 і 20. Отже, для запису годин мали використати саме цифри 0, 1, 2 та 9. Найменша кількість хвилин без перелічених цифр – 34, а найбільша – 58, тому показ розпочався не пізніше за 19:58 і завершився не раніше за 20:34.

Відповідь: 36 хвилин (з 19:58 до 20:34).

3. (*Григорій Філіпповський*) Дано квадрат $ABCD$. За допомогою не більше ніж трьох ліній (лінія – це пряма або коло) побудуйте кут, який дорівнює $105°$.

Розв'язання. I спосіб. Проведемо перші дві лінії – кола з центрами B і D та радіусом BD. Нехай T – точка перетину цих кіл, яка знаходиться з A по одну сторону від BD (рис. а). Третя лінія – пряма BT. Оскільки трикутник BDT рівносторонній, а трикутник BCD рівнобедрений і прямокутний, то $\angle TBC = \angle TBD + \angle DBC = 60° + 45° = 105°$.

II спосіб. Перші дві лінії – кола з центрами C і D та радіусом CD. Нехай ці кола перетинаються у точці K, яка знаходиться всередині квадрата, а третя лінія – пряма AK – перетинає сторону BC у точці L (рис. б). Тоді трикутник CKD рівносторонній, а трикутник AKD рівнобедрений з кутом $\angle ADK = 90° - 60° = 30°$ при вершині. Кут при основі цього трикутника $\angle KAD = 75°$, а тому $\angle ALC = 180° - 75° = 105°$ (внутрішні односторонні кути).



а) б) в)

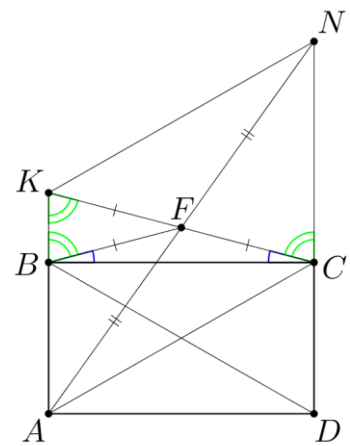
III спосіб. Перші дві лінії – знову кола з центрами C і D та радіусом CD. Нехай ці кола перетинаються зовні квадрата у точці N, а третя лінія – пряма AN – перетинає сторону CD у точці P (рис. в). Трикутник CND рівносторонній, а трикутник ADN рівнобедрений з кутом $\angle ADN = 90° + 60° = 150°$ при вершині. Кут при основі цього трикутника $\angle NAD = 15°$, а тому $\angle APC = 90° + 15° = 105°$ (зовнішній кут прямокутного трикутника ADP).

4. Знайдіть усі трійки простих натуральних чисел p, q, r таких, що $p + q^2 = r^4$.

Розв'язання. I спосіб. Оскільки $p = r^4 - q^2 = (r^2 - q)(r^2 + q)$ просте, то $r^2 - q = 1$. Так само $q = r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$ просте, тому $r - 1 = 1$, звідки послідовно дістаємо $r = 2, q = 3$ та $p = 7$.

II спосіб. Якщо усі числа p, q, r непарні, то ліва частина рівняння парна, а права ні. Якщо жодне з чисел q, r не дорівнює 3, то числа q^2 та r^4 при діленні на 3 дають остачу 1, а тому $p = r^4 - q^2$ ділиться на 3, тобто $p = 3$. Отже, серед чисел p, q, r точно є 2 та 3. Залишається всіма способами підставити 2 та 3 замість деяких двох змінних і подивитися, у яких випадках третя змінна виявиться простим натуральним числом.

Відповідь: $p = 7, q = 3, r = 2$.



5. *(Михайло Сидоренко, учень 8 класу)* На стороні BC прямокутника $ABCD$ зовні від цього прямокутника побудовано рівнобедрений трикутник BFC ($BF = CF$). Промінь CF перетинає пряму AB у точці K, а промінь AF перетинає пряму CD у точці N. Доведіть, що $KN = BD$.

Розв'язання. Нехай $\angle FBC = \angle FCB = \alpha$. Тоді $\angle KBF = \angle NCF = \angle BKC = 90° - \alpha$. Звідси трикутник BFK рівнобедрений та $FK = FB = FC$. Оскільки $\angle NFC = \angle AFK$ як вертикальні, то трикутники NCF та AKF рівні за стороною і двома прилеглими кутами. Тому $AF = FN$. Тепер трикутники KFN та CFA рівні за двома сторонами і кутом між ними. Звідси $KN = AC$. Залишилося помітити, що $AC = BD$, бо прямокутні трикутники ABD та DCA рівні за двома катетами.

Другий тур

6. На першій зустрічі делегацій Марса та Венери з'ясувалося, що загалом на всіх руках у кожного марсіанина 20 пальців, а у кожного венеріанця – менша кількість, але більша, ніж у землян. Венеріанців було на 6 більше, ніж марсіан, але загальна кількість пальців на руках у всіх венеріанців виявилась на 1 меншою. Скільки всього було учасників зустрічі?

Розв'язання. Нехай на зустрічі було x марсіан та $x + 6$ венеріанців, а на руках венеріанця y пальців. Тоді $20x - 1 = (x + 6)y$ та $y = \frac{20x-1}{x+6} = 20 - \frac{121}{x+6}$. Це число є цілим, тому $121 = 11^2$ ділиться на $x + 6$. Звідси $x + 6 = 11$ або $x + 6 = 121$. При $x + 6 = 11$ дістаємо $y = 9$, а при $x + 6 = 121$ – що $y = 19$. Перший варіант суперечить умові, тому $x + 6 = 121, x = 115$ та на зустрічі було 236 учасників.

Відповідь: 236 учасників.

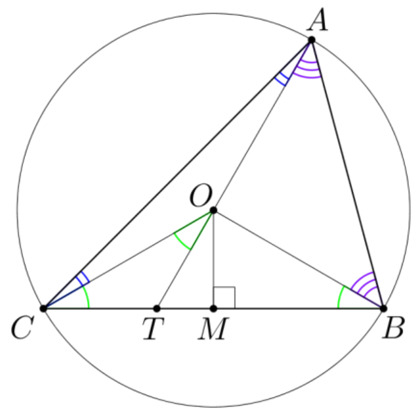
7. *(Григорій Філіпповський)* Точка O – центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. Промінь AO перетинає сторону BC у точці T. Відомо, що $BT = 2OT = 2CT$. Знайдіть усі кути трикутника ABC.

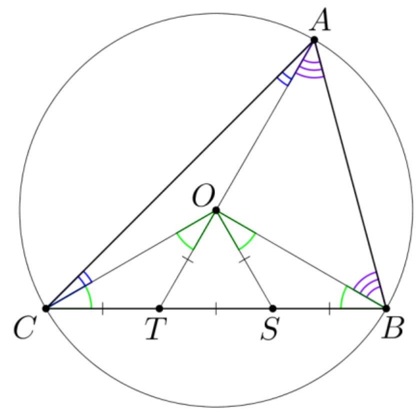
Розв'язання. I спосіб. Нехай M – середина BC. Якщо $OT = CT = x$ і $BT = 2x$, то

$BC = 3x$, $CM = \frac{3}{2}x$ та $TM = CM - CT = \frac{1}{2}x$. У прямокутному трикутнику OTM катет TM дорівнює половині гіпотенузи, отже $\angle OTM = 60°$. Цей кут є зовнішнім кутом при вершині рівнобедреного трикутника COT, отже $\angle TCO = \angle TOC = 30°$.

З рівнобедреного трикутника COB з кутом при основі $30°$ знаходимо $\angle BOC = 120°$, відповідно $\angle BOT = \angle BOC - \angle COT = 90°$. Кут $\angle COT = 30°$ є зовнішнім кутом при вершині рівнобедреного трикутника AOC, отже $\angle OAC = \angle OCA = 15°$. Кут $\angle BOT = 90°$ є зовнішнім кутом при вершині рівнобедреного трикутника AOB, отже $\angle OAB = \angle OBA = 45°$. Звідси кути трикутника ABC є такими:

$\angle A = 15° + 45° = 60°$, $\angle B = 30° + 45° = 75°$, $\angle C = 30° + 15° = 45°$.

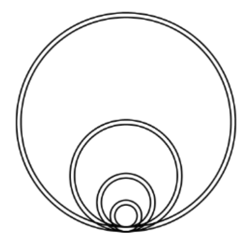




II спосіб. Нехай S – середина BT. Тоді BS = ST = OT = CT. Трикутник BOC рівнобедрений (OB = OC як радіуси), тому ∠BOS = ∠COT, а отже трикутники BOS та COT рівні за двома сторонами і кутом між ними. Тому $OS = OT = ST$ і трикутник SOT рівносторонній. Звідси $\angle OTS = 60°$ і далі розв'язання завершується, як у I способі.

Відповідь: $\angle A = 60°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 45°$.

8. На стадіоні є чотири бігові доріжки у формі кіл довжиною 50, 100, 200 та 400 метрів, які дотикаються у спільній точці. Заєць і вовк бігають по колах кожен зі своєю постійною швидкістю. Кожен з них бігає по колах у такому порядку: $50 – 100 – 200 – 400 – 50 – 100 – 200 – 400 – \cdots$, але вони почали бігати не одночасно і заєць завжди біжить по колах проти годинникової стрілки, а вовк – за годинниковою стрілкою. Чи обов'язково вони зустрінуться?

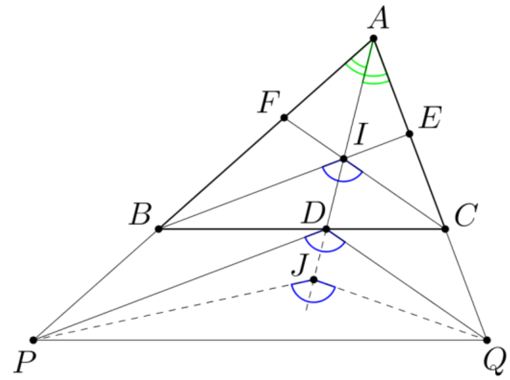


Розв'язання. Якщо в якийсь момент часу заєць і вовк знаходяться на одному колі, вони неодмінно зустрінуться, бо рухаються назустріч один одному. Нехай для визначеності вовк бігає зі швидкістю, не більшою за швидкість зайця. Розглянемо момент, коли вовк починає бігти по великому колу довжиною 400 м. Заєць у цей момент знаходиться на одному з інших кіл. Оскільки $50 + 100 + 200 < 400$ і заєць бігає не повільніше за вовка, він почне бігати по великому колу, коли вовк ще бігтиме по цьому колу. Тому вони точно зустрінуться.

Відповідь: так.

Третій тур

9. *(Олексій Карлюченко)* Нехай AD, BE та CF – бісектриси трикутника ABC. На продовженнях сторін AB та AC відмітили такі точки P та Q відповідно, що $PD || BE$ та $QD || CF$. Доведіть, що D – центр кола, вписаного у трикутник APQ.



Розв'язання. Нехай I та J – центри кіл, вписаних у трикутники ABC та APQ. Усі точки I, J та D лежать на бісектрисі кута A. Кути між бісектрисами трикутників дорівнюють $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$ та $\angle PJQ = 90^\circ + \frac{A}{2}$, а також $\angle PDQ = \angle BIC = \angle 90^\circ + \frac{A}{2}$, бо відповідні сторони цих кутів паралельні. Припустимо, що $AJ > AD$. Тоді кут $\angle PJQ$ дорівнює сумі зовнішніх кутів трикутників PJD та QJD при вершині J, звідки $\angle PJQ > \angle PDQ$, суперечність. Аналогічно дістаємо суперечність при $AD > AJ$, тому насправді точки D та J збігаються.

10. Уздовж берега озера ростуть кокосові пальми. Пітер та Венді вирішили обійти навколо озера і порахувати пальми, а також усі кокоси на пальмах. Вони вирушили з точки A у протилежних напрямках, вперше зустрілися у точці B і порявняли результати. Виявилося, що Пітер нарахував удвічі більше пальм і в сім разів більше кокосів, ніж Венді. Вони продовжили йти у тих самих напрямках і зустрілися вдруге у точці C. Виявилося, що від B до C Пітер знову нарахував удвічі більше пальм і в сім разів більше кокосів, ніж Венді. Вони продовжили йти у тих самих напрямках і зустрілися втретє у точці D. Від C до D Пітер знову нарахував удвічі більше пальм, ніж Венді. Хто на шляху від C до D нарахував більше кокосів і у скільки разів?

Розв'язання. Нехай уздовж берега росте n пальм. На шляху від A до B Пітер нарахував удвічі більше пальм, ніж Венді, а разом вони порахували всі пальми. Отже, Пітер нарахував $\frac{2n}{3}$ пальм, а Венді нарахувала $\frac{n}{3}$ пальм. Те саме повторилося на шляху від B до C та від C до D. Тому за весь час подорожі Пітер нарахував $2n$ пальм, а Венді n пальм. Таким чином, за весь час Пітер порахував усі пальми двічі, а Венді порахувала всі пальми по одному разу.

Нехай на всіх пальмах росте k кокосів. На шляху від A до B Пітер нарахував у сім разів більше кокосів, ніж Венді, а разом вони порахували всі кокоси. Отже, Пітер нарахував $\frac{7k}{8}$ кокосів, а Венді нарахувала $\frac{k}{8}$ кокосів. Те саме повторилося на шляху від B до C, тобто Пітер знову нарахував $\frac{7k}{8}$ кокосів, а Венді – $\frac{k}{8}$ кокосів. Але за весь час подорожі Пітер нарахував $2k$ кокосів, а Венді – k кокосів. Тому на шляху від C до D Пітер нарахував $2k - \frac{7k}{8} - \frac{7k}{8} = \frac{k}{4}$ кокосів, а Венді нарахувала $k - \frac{k}{8} - \frac{k}{8} = \frac{3k}{4}$ кокосів, тобто утричі більше за Пітера.

Відповідь: На шляху від C до D Венді нарахувала утричі більше кокосів, ніж Пітер.