8th Iranian Geometry Olympiad: Intermediate level

November 5, 2021 / *5 листопада, 2021*

1. Let ABC be a triangle with $AB = AC$. Let H be the orthocenter of ABC. Point E is the midpoint of AC and point D lies on the side BC such that $3CD = BC$. Prove that $BE \perp HD$.

1. *Нехай ABC — трикутник, у якому $AB = AC$. Нехай H — ортоцентр ABC. Точка E — середина AC, а точка D на стороні BC є такою, що $3CD = BC$. Довести, що $BE \perp HD$.*

2. Let $ABCD$ be a parallelogram. Points E, F lie on the sides AB, CD respectively, such that $\angle EDC = \angle FBC$ and $\angle ECD = \angle FAD$. Prove that $AB \geq 2BC$.

2. *Нехай $ABCD$ — паралелограм. Точки E, F лежать на сторонах AB, CD відповідно і є такими, що $\angle EDC = \angle FBC$ та $\angle ECD = \angle FAD$. Довести, що $AB \geq 2BC$.*

3. Given a convex quadrilateral $ABCD$ with $AB = BC$ and $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$. Let point E be the intersection of diagonals AC and BD. Point F lies on the side AD such that $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EA}$. Circle ω with diameter DF and the circumcircle of triangle ABF intersect for the second time at point K. Point L is the second intersection of EF and ω. Prove that the line KL passes through the midpoint of CE.

3. *Дано опуклий чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = BC$ та $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$. Нехай E — точка перетину діагоналей AC та BD. Точка F на стороні AD є такою, що $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EA}$. Коло ω з діаметром DF та описане коло трикутника ABF перетинаються вдруге у точці K. Точка L — друга точка перетину EF та ω. Довести, що пряма KL проходить через середину CE.*

4. Let ABC be a scalene acute-angled triangle with its incenter I and circumcircle Γ. Line AI intersects Γ for the second time at M. Let N be the midpoint of BC and T be the point on Γ such that $IN \perp MT$. Finally, let P and Q be the intersection points of TB and TC, respectively, with the line perpendicular to AI at I. Show that $PB = CQ$.

4. *Нехай ABC — різносторонній гострокутний трикутник з інцентром I та описаним колом Γ. Пряма AI перетинає Γ вдруге у точці M. Нехай N — середина BC та T — точка на Γ така, що $IN \perp MT$. Нарешті, нехай P та Q — точки перетину TB та TC відповідно з перпендикулярною до AI прямою, що проходить через точку I. Довести, що $PB = CQ$.*

5. Consider a convex pentagon $ABCDE$ and a variable point X on its side CD. Suppose that points K, L lie on the segment AX such that $AB = BK$ and $AE = EL$ and that the circumcircles of triangles CXK and DXL intersect for the second time at Y. As X varies, prove that all such lines XY pass through a fixed point, or they are all parallel.

5. *Розглянемо опуклий п'ятикутник $ABCDE$ та змінну точку X на стороні CD. Припустимо, що на відрізку AX лежать точки K, L такі, що $AB = BK$ та $AE = EL$, а описані кола трикутників CXK та DXL перетинаються вдруге у точці Y. Довести, що коли положення точки X змінюється, то всі такі прямі XY проходять через фіксовану точку або всі вони є паралельними.*

Time: 4 hours and 30 minutes. / *Час: 4 години 30 хвилин.*
Each problem is worth 8 points. / *Кожна задача оцінюється у 8 балів.*