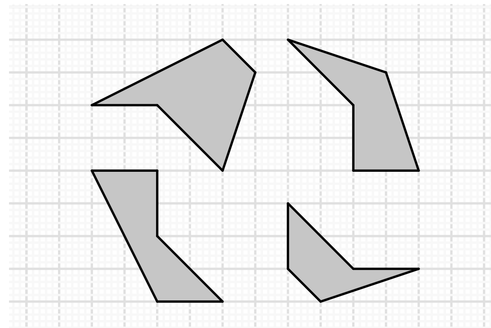
8^{th} Iranian Geometry Olympiad: Elementary level

November 5, 2021 / *5 листопада, 2021*

Задачі цього змагання не можна розголошувати до їх появи на офіційному веб-сайті IGO: igo-official.ir

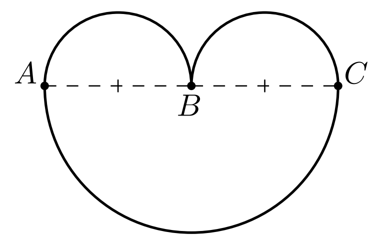


1. With putting the four shapes drawn in the following figure together make a shape with at least two reflection symmetries.

***1.** Складіть з чотирьох зображених на рисунку фігурок фігуру, яка має принаймні дві осі симетрії.*

2. Points K, L, M, N lie on the sides AB, BC, CD, DA of a square $ABCD$, respectively, such that the area of $KLMN$ is equal to one half of the area of $ABCD$. Prove that some diagonal of $KLMN$ is parallel to some side of $ABCD$.

***2.** Точки K, L, M, N лежать на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ відповідно, причому площа чотирикутника $KLMN$ дорівнює половині площі $ABCD$. Довести, що деяка діагональ $KLMN$ паралельна деякій стороні $ABCD$.*



3. As shown in the following figure, a *heart* is a shape consist of three semicircles with diameters AB, BC and AC such that B is midpoint of the segment AC.

A heart ω is given. Call a pair (P, P') *bisector* if P and P' lie on ω and bisect its perimeter. Let (P, P') and (Q, Q') be bisector pairs. Tangents at points P, P', Q, and Q' to ω construct a convex quadrilateral $XYZT$. If the quadrilateral $XYZT$ is inscribed in a circle, find the angle between lines PP' and QQ'.

***3.** Серце — це зображена на рисунку фігура, що складається з трьох півкіл з діаметрами AB, BC та AC таких, що B — середина відрізка AC.*

Дано серце ω. Назвемо пару точок (P, P') бісекторною, якщо P та P' лежать на ω та ділять периметр навпіл. Нехай (P, P') та (Q, Q') — бісекторні пари точок. Дотичні у точках P, P', Q та Q' до ω утворюють опуклий чотирикутник $XYZT$. Знайти кут між прямими PP' та QQ', якщо чотирикутник $XYZT$ є вписаним.

4. In isosceles trapezoid $ABCD$ ($AB \parallel CD$) points E and F lie on the segment CD in such a way that D, E, F and C are in that order and $DE = CF$. Let X and Y be the reflections of E and C with respect to AD and AF. Prove that circumcircles of triangles ADF and BXY are concentric.

***4.** У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) точки E та F лежать на відрізку CD так, що D, E, F та C йдуть у такому порядку та $DE = CF$. Нехай X та Y — точки, симетричні до E та C відносно AD та AF. Довести, що описані кола трикутників ADF та BXY мають спільний центр.*

5. Let A_1, A_2, $\ldots$, A_{2021} be 2021 points on the plane, no three collinear and

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \cdots + \angle A_{2021}A_1A_2 = 360^\circ,$$

in which by the angle $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ we mean the one which is less than 180° (assume that $A_{2022} = A_1$ and $A_0 = A_{2021}$). Prove that some of these angles will add up to 90°.

***5.** Нехай A_1, A_2, $\ldots$, A_{2021} — 2021 точок на площині, жодні три з яких не лежать на одній прямій, та*

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \cdots + \angle A_{2021}A_1A_2 = 360^\circ,$$

де під кутом $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ ми розуміємо той кут, що менше за 180° (тут $A_{2022} = A_1$ та $A_0 = A_{2021}$). Довести, що деякі з цих кутів у сумі дають 90°.

Time: 4 hours. / *Час: 4 години.*
Each problem is worth 8 points. / *Кожна задача оцінюється у 8 балів.*