8^{th} Iranian Geometry Olympiad: Advanced level

November 5, 2021 / *5 листопада, 2021*

Задачі цього змагання не можна розголошувати до їх появи на офіційному веб-сайті IGO: igo-official.ir

1. Acute-angled triangle ABC with circumcircle ω is given. Let D be the midpoint of AC, E be the foot of altitude from A to BC, and F be the intersection point of AB and DE. Point H lies on the arc BC of ω (the one that does not contain A) such that $\angle BHE = \angle ABC$. Prove that $\angle BHF = 90°$.

***1.** Дано гострокутний трикутник ABC з описаним колом ω. Нехай D — середина AC, E — основа висоти, проведеної з A до BC, та F — точка перетину прямих AB та DE. Точку H обрали на дузі BC кола ω (тій, що не містить точку A) так, що $\angle BHE = \angle ABC$. Довести, що $\angle BHF = 90°$.*

2. Two circles Γ_1 and Γ_2 meet at two distinct points A and B. A line passing through A meets Γ_1 and Γ_2 again at C and D respectively, such that A lies between C and D. The tangent at A to Γ_2 meets Γ_1 again at E. Let F be a point on Γ_2 such that F and A lie on different sides of BD, and $2\angle AFC = \angle ABC$. Prove that the tangent at F to Γ_2, and lines BD and CE are concurrent.

***2.** Два кола Γ_1 та Γ_2 перетинаються у двох різних точках A та B. Пряма, що проходить через точку A, вдруге перетинає Γ_1 та Γ_2 у точках C та D відповідно, причому A лежить між C та D. Дотична в точці A до Γ_2 вдруге перетинає Γ_1 в точці E. Нехай F — точка на Γ_2 така, що F та A лежать по різні сторони від BD та $2\angle AFC = \angle ABC$. Довести, що дотична в точці F до Γ_2 та прямі BD і CE перетинаються в одній точці.*

3. Consider a triangle ABC with altitudes AD, BE, and CF, and orthocenter H. Let the perpendicular line from H to EF intersects EF, AB and AC at P, T and L, respectively. Point K lies on the side BC such that $BD = KC$. Let ω be a circle that passes through H and P, that is tangent to AH. Prove that circumcircle of triangle ATL and ω are tangent, and KH passes through the tangency point.

***3.** Розглянемо трикутник ABC з висотами AD, BE і CF та ортоцентром H. Нехай пряма, проведена з H перпендикулярно до EF, перетинає EF, AB та AC у точках P, T та L відповідно. Точка K на стороні BC є такою, що $BD = KC$. Нехай ω — коло, яке проходить через H та P та дотикається до AH. Довести, що описане коло трикутника ATL та ω дотикаються, причому KH проходить через їхню точку дотику.*

4. 2021 points on the plane in the convex position, no three collinear and no four concyclic, are given. Prove that there exist two of them such that every circle passing through these two points contains at least 673 of the other points in its interior. (A finite set of points on the plane are in convex position if the points are the vertices of a convex polygon.)

***4.** Дано 2021 точок на площині у опуклому положенні, жодні три з яких не лежать на одній прямій і жодні чотири не лежать на одному колі. Довести, що серед них знайдуться дві такі, що всередині будь-якого кола, яке проходить через ці дві точки, містяться принаймні 673 інших точок. (Скінченна множина точок на площині знаходиться у опуклому положенні, якщо ці точки є вершинами опуклого многокутника.)*

5. Given a triangle ABC with incenter I. The incircle of triangle ABC is tangent to BC at D. Let P and Q be points on the side BC such that $\angle PAB = \angle BCA$ and $\angle QAC = \angle ABC$, respectively. Let K and L be the incenters of triangles ABP and ACQ, respectively. Prove that AD is the Euler line of triangle IKL. (The Euler line of a triangle is the line going through the circumcircle and orthocenter of that triangle.)

***5.** Дано трикутник ABC з інцентром I. Вписане коло трикутника ABC дотикається до BC у точці D. Нехай P та Q — точки на стороні BC такі, що $\angle PAB = \angle BCA$ та $\angle QAC = \angle ABC$ відповідно. Нехай K та L — інцентри трикутників ABP та ACQ відповідно. Довести, що AD є прямою Ейлера трикутника IKL. (Пряма Ейлера трикутника це пряма, що проходить через центр описаного кола та ортоцентр цього трикутника.)*

Time: 4 hours and 30 minutes. / *Час: 4 години 30 хвилин.*

Each problem is worth 8 points. / *Кожна задача оцінюється у 8 балів.*