XXV Олімпіада з математики

Русанівського ліцею м. Києва (2021)

6 КЛАС

Перший тур

1. Гришко, Сашко та Михайлик купили разом смачну піцу. Кожен з них вніс таку суму грошей, яка не перевищує половини суми, внесеної двома іншими. Скільки грошей вніс Михайлик, якщо піца коштує 120 грн?

Розв'язання: Гришко вніс не більше третини вартості піци, тобто не більше 40 грн. Справді, якби він вніс більше 40 грн, то його внесок був би більше від половини суми, внесеної двома іншими хлопцями. Аналогічно, приходимо до того ж висновку стосовно Сашка та Михайлика. Тоді всі разом вони внесли суму не більше 120 грн. Але вони не могли внести суму менше 120 грн, адже піца коштує рівно 120 грн. Тоді кожен з них мав внести рівно третину вартості піци. Михайлик вніс 40 грн, як і кожен його товариш.

Відповідь: 40 грн.

2. Кіт Мурчик одним помахом лапи може розірвати шматок паперового аркуша на 4 частини, а кіт Барсик – на 7 частин. Спочатку був один великий аркуш паперу. Чи зможуть коти, махаючи лапами, отримати в кінці 2021 шматочки? (Зауважте, що коти не розривають один і той же шматочок паперу одночасно)

Розв'язання: Кожен помах лапи кота Мурчика збільшує кількість шматочків паперу на 3, а кота Барсика – на 6. Якщо кіт Мурчик зробить x помахів, а кіт Барсик – y помахів, то загальна кількість шматочків буде дорівнювати $1 + 3x + 6y = 2021$. Тоді $3x + 6y = 2020$, але це неможливо, оскільки 2020 не ділиться націло на 3.

Відповідь: Не зможуть.

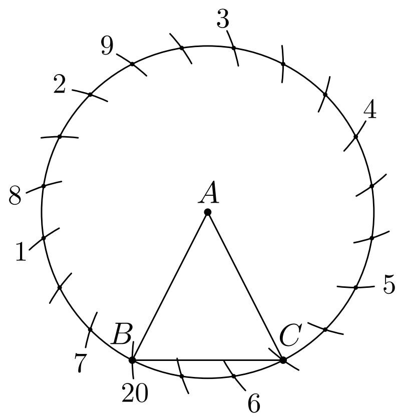
3. Коли кінчик хвоста Удава, який повз по землі, порівнявся з пальмою, на якій сиділа Мавпочка, вона вирішила терміново виміряти довжину свого приятеля. Вона миттєво спустилася вниз, пробігла вздовж Удава, швидко поклала банан біля його голови, розвернулася, з тією ж самою швидкістю побігла назад і поклала другий банан біля кінчика його хвоста. Далі вона покликала Папугу, який виміряв відстані від пальми до кожного банану, що виявилися рівними 48 і 16 папугам. Визначте довжину Удава в папугах.

Розв'язання: Поки Мавпочка наздоганяла голову Удава, вона пробігла відстань 48 (п). Потім вона повернулася до хвоста, отже, пробігла ще $48 - 16 = 32$ (п). Загалом, Мавпочка подолала відстань $48 + 32 = 80$ (п) за той час, за який Удав проповз 16 (п). Отже, Мавпочка бігає у 5 разів швидше за Удава. Тоді за той час, поки Мавпочка пробігла відстань 48 (п), Удав проповз $48: 5 = 9{,}6$ (п). Отже, довжина Удава дорівнює $48 - 9{,}6 = 38{,}4$ (п).

Відповідь: 38,4 папуги.

4. Барон Мюнхгаузен дуже полюбляє малювати рівнобедрені трикутники з кутами $54°, 63°, 63°$. Він стверджує, що зараз він намалював саме такий трикутник.

Як, користуючись лише циркулем, перевірити, чи справді він такий? *(Г. Філіпповський)*



Розв'язання: Нехай у трикутнику ABC кут A дорівнює $54°$, а кути B та C – по $63°$. Опишемо коло з центром A та радіусом AB. Якщо воно пройшло через точку C, то трикутник справді рівнобедрений. Тепер почнемо з точки B і будемо робити послідовні засічки на колі так, аби відстань між сусідніми засічками дорівнювала BC. Якщо після трьох обертів двадцята засічка вперше співпаде з точкою B, то кут при вершині A справді $54°$, адже $20 \cdot 54° = 1080° = 3 \cdot 360°$.

5. Чи можна, записавши цифри деякого 25-цифрового числа у зворотному порядку, отримати число, яке втричі більше за початкове?

Розв'язання: Припустимо, що таке число знайшлося. Тоді першою його цифрою може бути лише 1, 2 або 3, бо інакше при потроєнні отримаємо число із більшою кількістю цифр. Якщо перша цифра даного числа 1, то остання має бути 7. Але тоді початкове число менше за третину числа, яке отримаємо при зворотному записі. Якщо ж перша цифра даного числа 2 або 3, то остання – 4 або 1 відповідно. Але тоді отримане при зворотному записі число менше, ніж потроєне початкове.

***Відповідь*:** Не можна.

Другий тур

6. Чи можна у клітинках квадрата 4x4 розставити числа від 1 до 16 по одному разу так, щоб у кожному стовпчику і в кожному рядку добуток чисел в клітинках ділився націло на 16?

***Розв'язання*:** Припустимо, що нам вдалося розставити числа так, щоб виконувалася умова задачі. Якщо взяти добуток добутків по рядках, то він дорівнюватиме $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 16$. Серед чисел 1,2, ..., 16 числа 2,6,10,14 діляться на 2 у першому степені, числа 4,12 діляться на 2 у другому степені, число 8 у третьому степені і число 16 – у четвертому степені. Тому добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 16$ ділиться на 2 тільки у $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 15$ степені. Але це число має ділитися на 2 хоча б у 16 степені, бо за умовою задачі кожен добуток у рядках ділиться на два у четвертому степені, і таких рядків чотири. Протиріччя. Отже, розставити числа від 1 до 16 в клітинках таблиці 4×4 так, щоб виконувалися умови задачі, неможливо.

***Відповідь*:** Не можна.

7. П'ятеро осіб **A**, **B**, **C**, **D**, **E** грають у гру «Мафія». Серед них 2 мирних мешканці, 2 представники мафії та 1 комісар. Відомо, що представники мафії знають один одного, комісар теж знає, хто мафія, а мирні мешканці знають лише свої ролі. Крім того, відомо, що представники мафії завжди брешуть, а мирні мешканці та комісар завжди кажуть правду. Під час гри відбувся такий діалог із послідовних висловлювань:
A сказав: Я знаю, хто **B**.
B сказав: Я знаю, хто комісар.
C сказав: Я знаю, хто **B**.
D сказав: Я знаю, хто **E**.
Спробуйте за цими репліками визначити, хто ким є насправді.

***Розв'язання*:**
1) Із першої репліки зрозуміло, що **A** не може бути мирним мешканцем (якщо **A** – мирний мешканць, то він сказав правду, тобто знає, хто **B**, але мирні мешканці знають лише своєї ролі).
2) Нехай **A** – комісар. Тоді **B** – не комісар і не мирний мешканець (якщо **B** – мирний мешканець, то він сказав правду, тобто знає, хто комісар, але він не знає нічого про інших гравців). Отже, **B** – мафія. Причому **B** знає, що **A** не може бути мирним мешканцем, і знає, що **A** не мафія (інакше б **A** знав би, що **B** мафія, і мав би збрехати, що не знає **B**). Отже, **B** знає, що **A** – комісар, і сказав правду, що неможливо.
3) Отримана суперечність доводить, що **A** – це мафія. Тоді **A** бреше про те, що знає, хто **B**. Отже, **B** – не мафія. Тоді **B** сказав правду і знає, хто комісар. Але мирні мешканці ще не знають, хто комісар. Тому **B** – комісар.
4) **C** говорить третім і він, як і ми, вже вирахував, що **B** – комісар. Його репліка «Я знаю, хто **B**» – правдива. Отже, **C** – мирний мешканець.
5) **D** говорить четвертим і він, як і ми, вже вирахував, що **A** – це мафія, **B** – комісар, а **C** – мирний мешканець. Він знає свою роль, тому може легко дізнатись, хто **E**. Таким чином, його репліка правдива, отже, **D** – мирний мешканець. Ну а **E** тоді – мафія.

***Відповідь*:** **A** – мафія, **B** – комісар, **C** і **D** – мирні мешканці, **E** – мафія.

8. На безлюдному острові опинились 5 піратів та 1 мавпа. Весь перший день пірати збирали кокосові горіхи і так втомилися, що вирішили розділити здобич наступного ранку. Проте вночі один з них прокинувся і вирішив негайно забрати свою частку горіхів. Він розділив всі горіхи на 5 однакових купок, віддав зайвий горіх мавпі та спокійно пішов спати далі. Через деякий час прокинувся другий пірат і зробив все те саме: розділив горіхи на 5 купок, віддав зайвий горіх мавпі, заховав свою частку та ліг далі спати. Потім по черзі прокинулися третій, четвертий та п'ятий пірати, і кожен з них зробив те саме, що і перші два. Зранку всі пірати прокинулися та розділили решту горіхів на 5 рівних частин. Цього разу жодного зайвого горіха не залишилося. Скільки кокосових горіхів було зібрано першого дня на острові? Вкажіть найменшу можливу кількість.

***Розв'язання*:** Якщо додати до загальної кількості зібраних горіхів ще 4 горіхи, то необхідність віддавати зайвий горіх мавпі відпаде. Дійсно, початкова кількість горіхів стане кратною 5 і залишиться такою після дій кожного з піратів. Частка, яку забрав перший пірат, зросте на 1 горіх порівняно із кількістю, яку він взяв за умовою. Кількість горіхів, що залишилися, збільшиться на 4 і стане кратною 5, адже за умовою вона давала остачу 1 при діленні на 5. Частка, яку забрав другий пірат, зросте на 1 горіх порівняно із кількістю, яку він взяв за умовою. А кількість горіхів, що залишилися, збільшиться на 4 і стане кратною 5. Так буде продовжуватися ще тричі: для третього, четвертого і п'ятого піратів. Отже, кількість зібраних горіхів після збільшення на 4 має стати такою, що хоча б 5 разів поспіль ділиться націло на 5, тобто бути кратною $5^5 = 3125$. Найменшою шуканою кількістю може бути $3125 - 4 = 3121$. Залишається перевірити, що вранці кількість горіхів буде ділитися на 5. Дані про поділ горіхів занесені до таблиці:

№ етапу	Кількість горіхів, вилучених із загальної кількості	Решта горіхів
1	$0{,}2\cdot(3121 - 1) = 624$	$0{,}8\cdot(3121 - 1) = 2496$
2	$0{,}2\cdot(2496 - 1) = 499$	$0{,}8\cdot(2496 - 1) = 1996$
3	$0{,}2\cdot(1996 - 1) = 399$	$0{,}8\cdot(1996 - 1) = 1596$
4	$0{,}2\cdot(1596 - 1) = 319$	$0{,}8\cdot(1596 - 1) = 1276$
5	$0{,}2\cdot(1276 - 1) = 255$	$0{,}8\cdot(1276 - 1) = 1020$

***Відповідь*:** 3121 горіх.

7 КЛАС

1. У продавця є десять динь і ваги, за допомогою яких за одне зважування можна визначити загальну масу будь-яких рівно трьох динь. Чи можна за шість зважувань визначити загальну масу всіх динь? Відповідь обґрунтувати.

Розв'язання: Занумеруємо дині та позначимо їхню вагу $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, $Д_4$, $Д_5$, $Д_6$, $Д_7$, $Д_8$, $Д_9$, $Д_{10}$. Знайдемо масу трійок $Д_1 + Д_2 + Д_3 = \boldsymbol{a}$ та $Д_4 + Д_5 + Д_6 = \boldsymbol{b}$. Тоді маса перших шести динь, знайдена за два зважування, дорівнює $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Залишилося знайти масу решти чотирьох динь $Д_7$, $Д_8$, $Д_9$, $Д_{10}$. Знайдемо маси всіх можливих трійок із даних чотирьох динь:
$Д_7 + Д_8 + Д_9 = \boldsymbol{k}$, $Д_7 + Д_8 + Д_{10} = \boldsymbol{p}$,
$Д_7 + Д_9 + Д_{10} = \boldsymbol{r}$, $Д_8 + Д_9 + Д_{10} = \boldsymbol{q}$.
Таким чином, $3(Д_7 + Д_8 + Д_9 + Д_{10}) = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{q}$.
Звідси маса чотирьох останніх динь $Д_7 + Д_8 + Д_9 + Д_{10} = \boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{k+p+r+q}}{3}$.
Тому маса всіх десяти динь після шести зважувань дорівнює $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.
Відповідь: можна.

2. Суму S всіх тризначних чисел подали у вигляді $S = 600x + y$, де x та y – тризначні числа. Знайдіть числа x та y.

Розв'язання: Знайдемо суму всіх тризначних чисел 100, 101, …, 998, 999. Їх рівно 900. Поєднаємо числа у пари: перше з останнім, друге з передостаннім і т. д., рухаючись назустріч до останньої пари 549 і 550. Сума чисел у кожній парі 1099 і таких пар 450. Тому загальна сума всіх чисел дорівнює $1099 \cdot 450 = 494550$. При діленні знайденої суми на 600 отримаємо 824 та остачу 150. Отже, $494550 = 600 \cdot 824 + 150$. Числа 824 та 150 задовольняють умову задачі. Але умову задачі задовольняє ще одна пара чисел $494550 = 600 \cdot 823 + 750$.
Відповідь: $\begin{cases} x = 824, \\ y = 150, \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 823, \\ y = 750. \end{cases}$

3. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $(m^2 + m + 1)^2 - (n^2 - n + 2)^2 = 2020$.

Розв'язання: Запишемо дане рівняння у вигляді
$$(m \cdot (m + 1) + 1)^2 - (n \cdot (n - 1) + 2)^2 = 2020.$$
Оскільки $m \cdot (m + 1)$ та $n \cdot (n - 1)$ – добутки двох послідовних чисел, серед яких одне обов'язково парне, то при всіх цілих m та n числа $m \cdot (m + 1)$ та $n \cdot (n - 1)$ є парними. Тому $(m \cdot (m + 1) + 1)^2$ – непарне число, а $(n \cdot (n - 1) + 2)^2$ – парне. Але різниця непарного та парного чисел не може бути парною.
Відповідь: рівняння в цілих числах розв'язків немає.

4. Дано рівнобедрений прямокутний трикутник *ABC* ($C = 90°$). Всередині трикутника на серединному перпендикулярі до *AC* взято точку *K* таку, що кут *ABK* дорівнює $15°$.Обчисліть величину кута *BKC*. (*О. Шамович*)

Розв'язання: Нехай $AC = BC = 2a$. Очевидно, перпендикуляр *KT* до BC дорівнює a. Оскільки $\angle KBT = 30°$ $(45° - 15°)$, то $BK = 2a$ (катет *KT* лежить проти кута $30°$). Отже, $BK = BC = 2a$ і $\angle BKC = \angle BCK = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$.
Відповідь: $\angle BKC = 75°$.

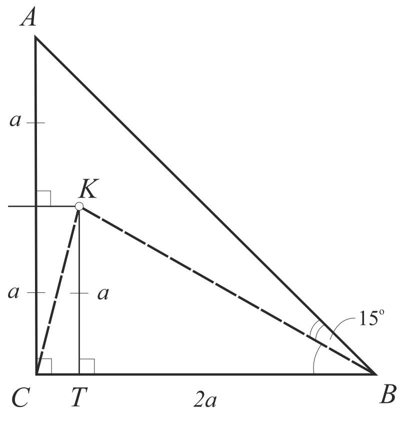


рис.1

5. Дано кут, що дорівнює $138°$ та шаблон кута в $7°$. Користуючись цим шаблоном та провівши не більш, ніж 5 ліній, побудуйте бісектрису кута $138°$. (*Ю. Рабінович*)

Розв'язання: Нехай кут A дорівнює $138°$. Беремо будь-яку точку B на стороні кута та відкладаємо двічі кут $7°$ ($1^а$ та $2^а$ лінії).

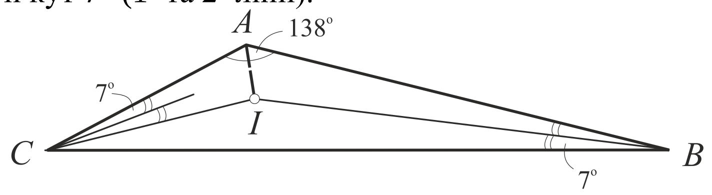


рис.2

Друга лінія перетне сторону кута $138°$ у деякій точці C. Очевидно, що $\angle ACB = 180° - 138° - 14° = 28°$. Використовуючи шаблон, ще двічі відкладаємо кут $7°$ ($3^я$ та $4^а$ лінії). Тоді $4^а$ лінія є бісектрисою кута ACB ($28°: 2 = 14°$), а тому і $4^а$ та $1^а$ лінії перетинаються в інцентрі I трикутника ABC. Отже, AI є третьою бісектрисою трикутника ABC, тобто AI – $5^а$ лінія.

6. Відомо, що у чотирикутнику $ABCD$ ($AB > AD$) $AB||CD$ і $BC||AD$. Точка E на стороні AB така, що $AE = AD$. На продовженні DA за точку A взято таку точку F, що $BF \perp DE$. Доведіть рівність кутів AEF та CAD. (*М. Плотніков*)

Розв'язання: Нехай DE та BF перетинаються в точці N. Згідно з рисунком потрібно довести, що $\angle 1 = \angle 2$. Нехай $\angle ADE = \angle AED = \angle BEN = \alpha$. Тоді $\angle NBE = 90° - \alpha$ (з ΔNBE) та $\angle NFD = 90° - \alpha$ (з ΔNFD). Тому трикутник AFB рівнобедрений та $AF = AB$. Трикутники ABC та CDA рівні (сторона AC спільна, прилеглі до неї кути рівні, бо $AB||CD$ і $BC||AD$), тому $AB = CD$. Отже, $AF = CD$. Але $\angle EAF = \angle CDA$ (внутрішні односторонні при прямих $AB||CD$), тому $\Delta AEF = \Delta DAC$ за двома сторонами та кутом між ними. Таким чином, $\angle 1 = \angle 2$.

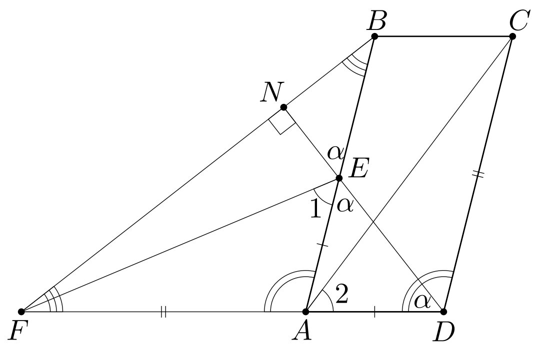


рис.3

8 КЛАС

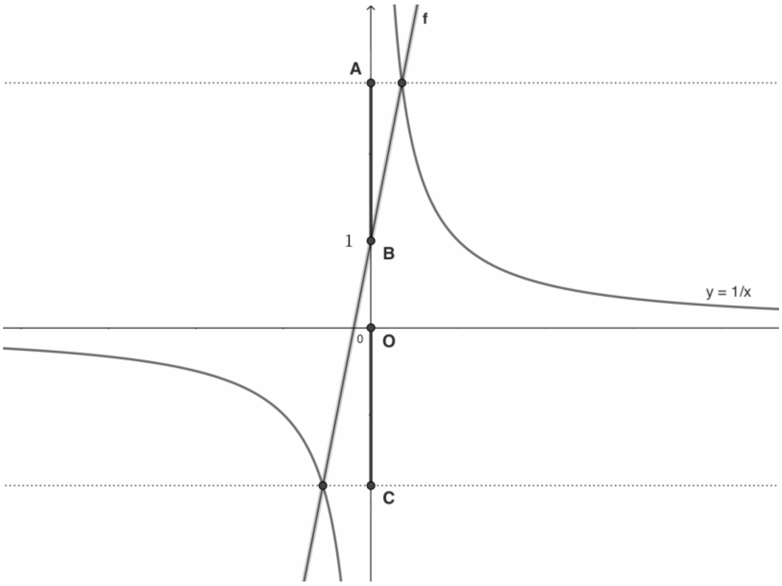
1. На дошці написані чотири числа, жодне з яких не дорівнює 0. Якщо кожне з чисел помножити на суму трьох інших, то отримаємо чотири однакових числа. Доведіть, що квадрати записаних на дошці чисел рівні.

Розв'язання: Нехай записані числа a, b, c та d. За умовою $a(b+c+d) = b(a+c+d)$, звідки $(a–b)(c+d) = 0$.

Аналогічно з рівності $c(a+b+d) = d(a+b+c)$ отримуємо $(c–d)(a+b) = 0$.

Оскільки або $c+d$, або $c–d$ не дорівнює 0, то або $a = b$, або $a = – b$. В обох випадках квадрати чисел a та b рівні. Оскільки числа a та b були вибрані довільно, звідси випливає твердження задачі.

2. Дана гіпербола $y = 1/x$ та пряма f, що проходить через точку B (0;1) (див. рисунок). Довести, що відрізки AB та CO рівні. *(Д. Мухін)*



Розв'язання: Графік прямої $y = kx + b$ проходить через точку (0;1), тому $1 = k \cdot 0 + b$, тобто b = 0 та $y = kx + 1$.

Нехай $(x_1; 1/x_1)$ та $(x_2; 1/x_2)$ – точки перетину графіків, які лежать в першій та третій координатних чвертях. Для абсцис цих точок маємо

$$kx + 1 = 1/x,$$
$$kx^2 + x - 1 = 0,$$
$$x^2 + x/k - 1/k = 0.$$

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -1/k$, $x_1 \cdot x_2 = -1/k$, звідки $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$. (❋)

Точки A та C мають такі ж ординати, як точки перетину графіків прямої та гіперболи.

Тоді $AB = AO - 1 = 1/x_1 - 1$, а оскільки $x_2 < 0$, то $OC = -1/x_2$.

Перевіримо, що $AB = CO$:

$$\frac{1}{x_2} - 1 = -\frac{1}{x_2},$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1,$$
$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = 1,$$ а це вірно за (❋).

3. Відомо, що p та q – прості числа, а вираз

$$6p^3 + 2p^2q + 12p^3q + 3pq^2 + q^3 + 6pq^3 + 63p + 21q + 126pq$$

є добутком двох простих чисел. Знайти значення виразу. *(П. Козаровицька)*

Розв'язання: Розкладемо на множники заданий вираз, та отримаємо наступне:

$$6p^3 + 2p^2q + 12p^3q + 3pq^2 + q^3 + 6pq^3 + 63p + 21q + 126pq =$$
$$= (3p + q + 6pq)(2p^2 + q^2 + 21).$$

Оскільки p та q прості числа, то кожне з них не менше за 2. Тому очевидно, що $(3p + q + 6pq)$ та $(2p^2 + q^2 + 21)$ не дорівнюють 1. Оскільки за умовою вираз є добутком двох простих чисел, то кожна дужка є простим числом.

Якщо q непарне, то множник $(2p^2 + q^2 + 21)$ є парним. Тому q не може бути непарним, тобто $q = 2$.

Відповідно $(3p + q + 6pq)(2p^2 + q^2 + 21) = (2 + 15p)(2p^2 + 25)$.

Якщо число p просте та не дорівнює 3, то $p^2 \equiv 1 (mod\ 3)$, а тоді $2p^2 + 25 \equiv 0 (mod\ 3)$, що не підходить, оскільки значення має бути простим числом, більшим за 25. Тому $p = 3$.

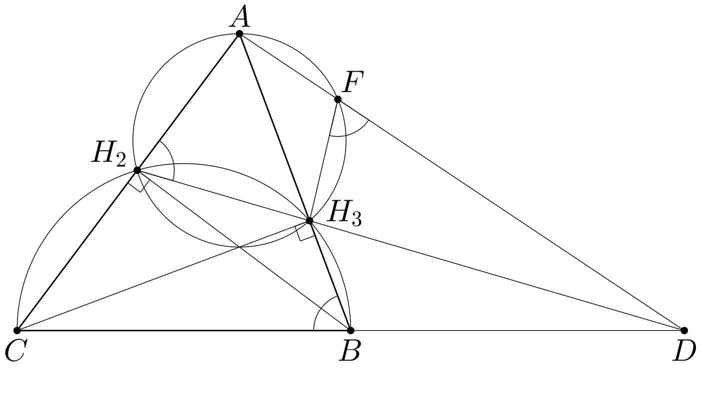
Підставимо та знайдемо значення виразу:

$$6p^3 + 2p^2q + 12p^3q + 3pq^2 + q^3 + 6pq^3 + 63p + 21q + 126pq =$$
$$(3p + q + 6pq)(2p^2 + q^2 + 21) =$$
$$= (2 + 15p)(2p^2 + 25) = 47 \cdot 43 = 2021.$$

Відповідь: 2021.

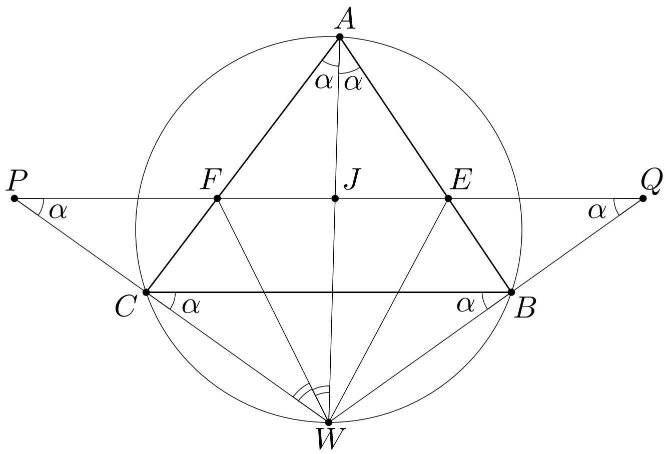
4. Нехай BH_2 та CH_3 – висоти гострокутного трикутника ABC, в якому $AB<AC$. Пряма H_2H_3 перетинає продовження сторони BC у точці D. Відрізок AD перетинає коло, описане навколо трикутника AH_2H_3, у точці F. Довести, що навколо чотирикутника FH_3BD можна описати коло. *(Г. Філіпповський)*

Доведення: Чотирикутник AFH_3H_2 – вписаний, тому $\angle AH_2H_3 = \angle H_3FD$. Чотирикутник BH_3H_2C є вписаним у коло з діаметром BC, тому $\angle ABC = \angle AH_2H_3$. Звідси $\angle H_3FD + \angle DBH_3 = 180°$, а отже чотирикутник FH_3BD є вписаним.



5. У трикутнику ABC точка W – середина дуги BC описаного кола, WF і WE – бісектриси трикутників ACW та ABW відповідно. Пряма FE перетинає промені WC та WB у точках P та Q відповідно. Доведіть, що $WA = WP = WQ$. *(М. Курський)*

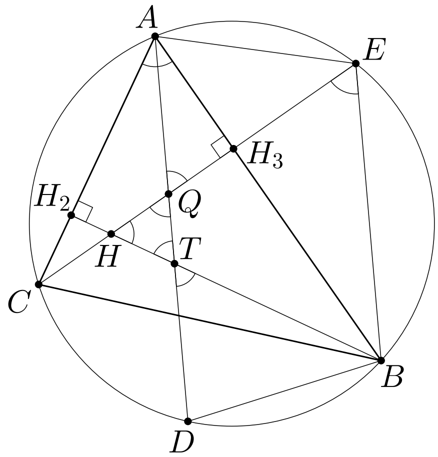
Доведення: За властивістю бісектриси маємо $AF/CF=AW/WC$ та $AE/EB=AW/WB$. Оскільки $WB = WC$, то $AF/CF=AE/EB$. Тому за теоремою, оберненою до теореми про пропорційні відрізки, $FE \parallel BC$. Позначимо $\angle WAB = \angle WAC = \alpha$. Тоді $\angle WCB = \alpha$ (вписаний, спирається на дугу BW). Оскільки $PQ \parallel BC$, то $\angle WPF = \angle WCB = \alpha$. У трикутниках WFP та WFA є дві пари рівних кутів, отже рівні і треті кути цих трикутників. Тому трикутники WFP та WFA рівні за спільною стороною та прилеглими до неї кутами. Звідси $WP=WA$. Аналогічно $WQ=WA$.



Зауваження. Нехай I – інцентр трикутника ABC, а J – точка перетину прямої EF з AW. Неважко довести, що трикутники WFC та WFJ рівні за стороною та прилеглими кутами, звідки $WC=WJ$. Оскільки за теоремою про «тризуб» також $WC=WI$, то точки I та J збігаються.

6. Дано гострокутний трикутник ABC з кутом $\angle A = 60°$. Висоти, проведені з вершин B та C, перетинають бісектрису кута A в точках T і Q відповідно. Бісектриса кута A перетинає описане навколо трикутника ABC коло в точці D. Довести, що $AT = QD$. *(А. Бровченко)*

Доведення: Продовжимо CQ до перетину з описаним колом, дістанемо точку E. Нехай H – точка перетину висот трикутника ABC. У прямокутному трикутнику AQH_3 маємо $\angle QAH_3 = 30°$, отже $\angle AQH_3 = 60°$. Аналогічно з трикутника AH_2T дістаємо $\angle ATH_2 = 60°$, тому трикутник HQT рівносторонній.



Оскільки $\angle CEB = \angle CAB = 60°$ (вписані, спираються на одну дугу), то у трикутнику HEB два кути по 60°, тобто цей трикутник теж рівносторонній. Звідси випливає, що $QE = TB$, бо $HQ = HT$. Також $QT \parallel EB$, тому $AEBD$ – вписана трапеція. Ця трапеція є рівнобічною, отже $DB = AE$ та $\angle TDB = \angle QAE$.

Також маємо $\angle BTD = \angle AQE = 60°$. Таким чином, у трикутниках DBT та AEQ є пара рівних сторін та дві пари рівних кутів. Тому ці трикутники рівні, звідки $AQ = TD$.