Розв'язання конкурсних задач від Журі олімпіади з математики Русанівського ліцею від 12.04.2020

6 клас

1. На честь завершення карантину всі хлопчики 6-А класу запланували подарувати дівчатам квіти. Андрійко вирішив подарувати квіти 11 дівчатам, Грицько — 12 дівчатам, Миколка — 13 дівчатам і так далі. Сашко, останній за списком хлопчик, вирішив подарувати квіти всім дівчатам у класі. Скільки дівчат у 6-А класі, якщо всього в ньому 36 дітей?

   Розв'язання: Нехай у класі x хлопчиків та $36 - x$ дівчат. Тоді Сашко, який за списком має номер x, планує подарувати квіти $11 + x - 1$ дівчатам. Отже, маємо рівняння: $11 + x - 1 = 36 - x$. З нього отримаємо, що $x = 13$. Тоді в класі 36 – 13 = 23 дівчинки.

   Відповідь: 23 дівчинки.

2. Перед уроком математики учитель записав на дошці дев'ять чисел: 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16. Бажаючи заплутати однокласників, Петрик та Іванко витерли по 4 числа кожен. Учитель помітив, що сума чисел, які витер один із них, утричі більша від суми чисел, витертих іншим учнем. Яке число могло залишитися на дошці?

   Розв'язання: Помітимо, що сума всіх чисел на дошці дорівнює 70, а сума восьми чисел, які витерли хлопці, кратна 4. Оскільки 70 при діленні на 4 дає остачу 2, то число, яке залишилось на дошці, при діленні на 4 дає остачу 2. Серед початкових чисел таке число єдине. Це число 6.

   Для повного розв'язання задачі слід показати, які числа витерли хлопці. Один із них витер числа 1, 3, 4, 8, сума яких дорівнює 16. Другий — числа 9, 11, 12, 16, які в сумі дають 48.

   Відповідь: На дошці залишиться число 6.

7 клас

1. На дошці в рядок записано 100 чисел, які відрізняються від нуля. Відомо, що кожне число, крім першого та останнього, є добутком двох сусідніх з ним чисел. Перше число дорівнює 7. Яким є останнє число?

Розв'язання: Позначимо дані числа: $a_1 = 7$; a_2; a_3; … ; a_{100}. За умовою: $a_2 = a_1 \cdot a_3$; $a_3 = a_2 \cdot a_4$; … ; $a_{99} = a_{98} \cdot a_{100}$.

Оскільки нулів в ряду немає, то $a_1 = \frac{a_2}{a_3}$; $a_2 = \frac{a_3}{a_4}$; … ; $a_{98} = \frac{a_{99}}{a_{100}}$.

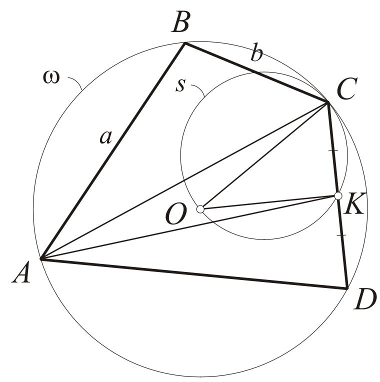
Перемножимо перші дві рівності: $a_1 \cdot a_2 = \frac{a_2 \cdot a_3}{a_3 \cdot a_4}$, звідки $a_1 = \frac{1}{a_4}$.

Аналогічно $a_4 = \frac{1}{a_7}$, отже $a_1 = a_7$. Таким чином $a_1 = a_7 = a_{13} = ... = a_{97}$.

Тоді $a_{100} = \frac{1}{a_{97}} = \frac{1}{7}$.

Відповідь: останнє число $\frac{1}{7}$

2. Чотирикутник *ABCD* було вписано в коло ω. Відновіть цей чотирикутник за сторонами *AB = a*, *BC = b*, кутом *ABC* і відрізком *AK = n*, де *K* – середина *CD*. (*М. Лопатенко*).



Побудова:

1) Будуємо ΔABC за двома сторонами й кутом між ними ($AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC$).
2) Описуємо коло ω з центром *O* навколо ΔABC.
3) Будуємо коло *s* на *OC* як на діаметрі.
4) З вершини *A* розхилом циркуля $AK = n$ робимо засічку – отримуємо точку *K* – середину *CD*.
5) Промінь *CK* перетинає ω у вершині *D*.

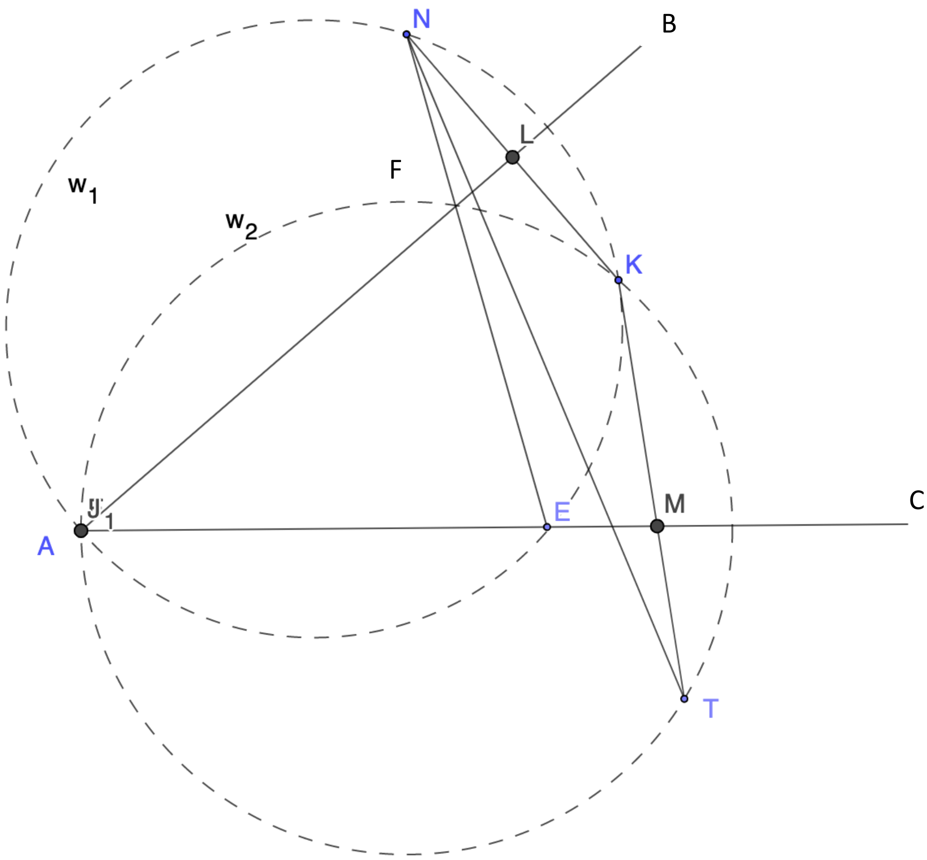
8клас

1. Довести, що квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ з цілими непарними коефіцієнтами не має раціональних коренів.

Розв'язання: Припустимо, що рівняння має раціональні корені, *a = 2m + 1, b = 2n + 1, c = 2p + 1* (m, n, p — цілі). Тоді $D = b^2 - 4ac$ — квадрат непарного натурального числа:
$D = (2n+1)^2 - 4(2m+1)(2p+1) = 4n(n+1) - 8(2mp+m+p) - 3$ дає при діленні на 8 залишок 5 (так як *n (n + 1)* ділиться на 2 при цілому *n*). З іншого боку, квадрат непарного числа при діленні на 8 дає в залишку 1. Протиріччя.

2. К - довільна точка всередині гострого кута ВАС. Точки N *і* T – її симетричні образи відносно AB та AC відповідно. Описані кола трикутників АКN *і* АКТ вдруге перетинають АС *і* АВ відповідно в точках E та F. Доведіть, що чотири точки – N, F, E, T – належать одній прямий. *(*О. Карлюченко*)*

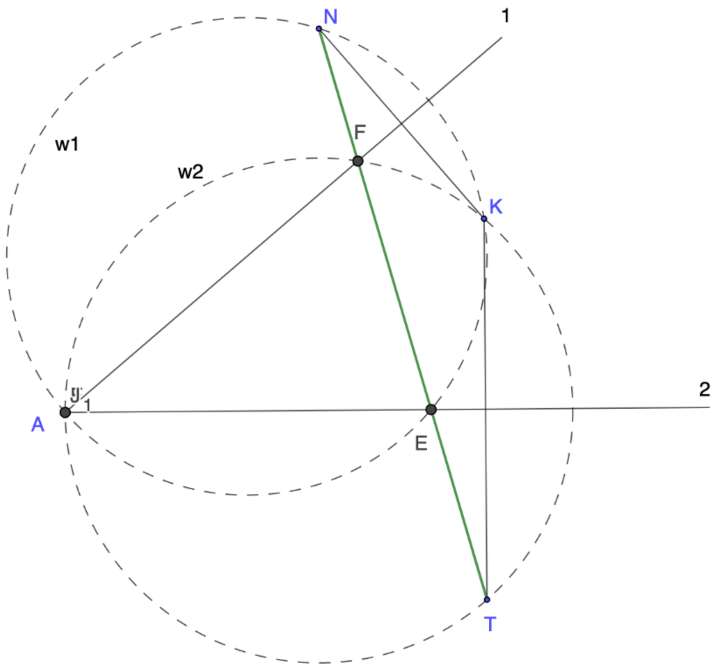
Доведення:



З'єднаємо NE та NT та покажемо, що ∠ENK = ∠TNK, та доведемо, що NET - пряма. Аналогічно можна буде зробити з іншої сторони та показати, що TFN - пряма.

∠ENK = ∠KAE, оскільки вони вписані та спираються на одну дугу в колі w_1.
Оскільки LM - середня лінія в трикутнику △NKT, то ∠MLK = ∠TNK.
Навколо чотирикутника ALKM можна описати коло, оскільки ∠L = ∠M = 90˚. А тому ∠KLM = ∠KAM.

A тоді $\angle KLM = \angle KAM = \angle ENK \Longrightarrow NE$ співпадає з NT.



Задачі для батьків, та всіх бажаючих

1. 50 туристів організували табір з 50 наметів (в кожному - по одному туристу). Попарні відстані між наметами виявилися різними. Опівдні з кожного намету вийшов його володар і попрямував до найближчого до нього намету. Яка найбільша кількість туристів після цих дій могла опинитися в одному наметі?

***Розв'язання*:** *5* туристів. Припустимо, що в намет Р зайшли 6 туристів: *A, B, C, Д, E, F*. Тоді, скажімо, в трикутнику *APB* сторона *AB* - найбільша, оскільки *AP* і *BP* - коротші відстані. Тому кут *APB* в цьому трикутнику - найбільший, тобто він є більшим за *60* градусів. Тоді, якщо таких туристів *6*, то сума кутів *APB, BPC, CPД, ДPE, EPF, FPA* буде більшою, ніж *360* градусів. Протиріччя.

2. Троє гравців кладуть на круглий стіл п'ятикопійчані монети по черзі. Монети можуть торкатися, але не повинні накладатися одна на одну. Програє той, чия монета не вміститься на столі. Чи зможуть перший та третій (за порядком ходів) гравці домовитися, щоб другий завжди програвав?

***Розв'язання*:** Так! Першим ходом перший гравець кладе монету в центр стола. Після ходу другого гравця третій та перший кладуть свої монети на такі два місця, які утворюються після повороту відносно центра стола монети другого гравця - на 120 градусів (за та проти годинникової стрілки).
Такі місця завжди будуть, і в деякий момент другому гравцю не буде куди покласти монету.

Бажаємо успіхів і здоров'я!

Журі олімпіади з математики Русанівського ліцею