XXIV олімпіада з математики
Русанівського ліцею

6 клас
I тур

1. Обчисліть значення виразу: $158\cdot\left(\frac{12-\frac{12}{7}-\frac{12}{289}-\frac{12}{85}}{4-\frac{4}{7}-\frac{4}{289}-\frac{4}{85}}:\frac{5+\frac{5}{13}+\frac{5}{169}+\frac{5}{91}}{6+\frac{6}{13}+\frac{6}{169}+\frac{6}{91}}\right)\cdot\frac{505505505}{711711711}$.

Відповідь: 404.
<u>Розв'язання:</u> Після винесення спільного множника в чисельниках та знаменниках та скорочення дробів, отримаємо $158\cdot\left(\frac{12-\frac{12}{7}-\frac{12}{289}-\frac{12}{85}}{4-\frac{4}{7}-\frac{4}{289}-\frac{4}{85}}:\frac{5+\frac{5}{13}+\frac{5}{169}+\frac{5}{91}}{6+\frac{6}{13}+\frac{6}{169}+\frac{6}{91}}\right)\cdot\frac{505505505}{711711711}=158\cdot\left(\frac{12\cdot\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{289}-\frac{1}{85}\right)}{4\cdot\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{289}-\frac{1}{85}\right)}:\frac{5\cdot\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{169}+\frac{1}{91}\right)}{6\cdot\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{169}+\frac{1}{91}\right)}\right)\cdot\frac{505\cdot1001001}{711\cdot1001001}=158\cdot\left(\frac{12}{4}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{505}{711}=(2\cdot79)\cdot\frac{18}{5}\cdot\frac{5\cdot101}{9\cdot79}=4\cdot101=404.$

2. Жабеня переслідує коника–стрибунця, що знаходиться попереду нього на відстані у 40 своїх стрибків. Жабеня робить 7 стрибків за той же час, за який коник робить 9 стрибків, але 3 стрибки жабеняти по відстані дорівнюють 5 стрибкам коника. Скільки стрибків потрібно зробити жабеняті, щоб наздогнати коника–стрибунця?

Відповідь: 105.
<u>Розв'язання:</u> За умовою 3 стрибки жабеняти по відстані дорівнюють 5 стрибкам коника, отже, 21 стрибок жабеняти по відстані дорівнює 35 стрибкам коника. Оскільки жабеня робить 7 стрибків за той же час, за який коник робить 9 стрибків, то жабеня робить 21 стрибок за той же час, за який коник робить 27 стрибків. Таким чином, жабеня за 21 стрибок скорочує відстань до коника на $35-27=8$ його стрибків. Оскільки спочатку відстань між ними була 40 стрибків коника, то жабеня повинно зробити $40:8\cdot21=105$ стрибків, щоб наздогнати коника.

3. Знайдіть кількість натуральних чисел від 1 до 2019 включно, які є сумою двох послідовних натуральних чисел і сумою п'яти послідовних натуральних чисел одночасно. *(Наприклад, 25=12+13=3+4+5+6+7)*

Відповідь: 201.
<u>Розв'язання:</u> Число можна подати як суму двох послідовних натуральних чисел тоді і тільки тоді, коли воно є непарним натуральним числом не меншим за

3, адже $n + (n + 1) = 2n + 1, n \in N$. Число можна подати як суму п'яти послідовних натуральних чисел тоді і тільки тоді, коли воно подається у вигляді $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) = 5n + 10, n \in N$, тобто кратне 5 і не менше за 15. Отже, потрібно знайти кількість натуральних чисел від 15 до 2019 включно, які діляться на 5, але не діляться на 2. Серед $2019 - 15 + 1 = 2005$ чисел на 5 ділиться 401 число, з них на 5 і на 2 одночасно (тобто на 10) діляться 200 чисел. Тоді шуканих чисел (діляться на 5, але не діляться на 2) буде $401 - 200 = 201$ число.

4. Яку найменшу кількість однакових кубиків можна розташувати на столі так, щоб повністю було видно рівно 23 їх грані? Дивитися можна зі всіх боків. Грань не видно лише у випадку, коли вона повністю дотикається до іншої грані або до стола.

Відповідь: 5.

<u>*Розв'язання:*</u> У кожного кубика всього 6 граней, на одній він стоїть, отже, видно максимум 5 граней. Якщо кубиків буде 4 або менше, то видно буде не більше 20 граней. Приклад розташування 5 кубиків так, щоб було видно 23 грані зображено на рисунку 1.

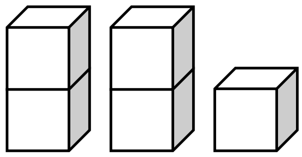


Рис. 1

5. Петрик підійшов до річки з собакою, котом, двома пляшками молока, 2019 мішками корму для собак і 2019 мішками корму для котів. Йому потрібно переправитися на інший берег річки, але в човні, окрім місця для Петрика, без якого човен рухатися не може, є лише два вільних місця (будемо вважати, що кожний предмет і кожна тваринка займають одне місце). Відомо, що собака не може залишатися з котом, собака і кіт не можуть залишатися з молоком, собака не може залишатися з кормом для собак і кіт не може залишатися з кормом для котів без Петрика. Чи зможе Петро переправити тваринок та їхню їжу на другий берег без втрат? *(В. Шмонько)*

Відповідь: Так.

<u>*Розв'язання:*</u> Позначимо кота «К», собаку «С», молоко «М1» і «М2», 2019 мішків корму для котів «к1», «к2», …,«к2019», а 2019 мішків корму для собак «с1», «с2», …,«с2019». Петрик постійно возить тваринок і/або вантаж. Перше перевезення – обов'язково кіт із собакою, інакше хтось із них з'їсть свій корм або вип'є молоко. Далі перевезення можна здійснити наприклад так, як показано у таблиці:

«М1» «М2» «к1», «к2», …, «к2019» «с1», «с2», …, «с2019»	→ «К» «С»	
«М1» «М2»	←	«К»

«к1», «к2», …, «к2019» «с1», «с2», …, «с2019»	«С»	
«М1» «М2» «к1», «к2», …, «к2019» «с2», …, «с2019»	→ «С» «с1»	«К»
«М1» «М2» «к1», «к2», …, «к2019» «с2», …, «с2019»	← «С»	«К» «с1»
«М1» «М2» «к1», «к2», …, «к2019» «с3», …, «с2019»	→ «С» «с2»	«К» «с1»
«М1» «М2» «к1», «к2», …, «к2019» «с3», …, «с2019»	← «С»	«К» «с1» «с2»
	…	
«М1» «М2» «к1», «к2», …, «к2019»	→ «С» «с2019»	«К» «с1», «с2», …, «с2018»
«М1» «М2» «к1», «к2», …, «к2019»	← «С»	«с1», «с2», …, «с2019» «К»
«М2» «к1», «к2», …, «к2019»	→ «С» «М1»	«с1», «с2», …, «с2019» «К»
«М2» «к1», «к2», …, «к2019»	← «К» «С»	«М1» «с1», «с2», …, «с2019»
«С» «к1», «к2», …, «к2019»	→ «К» «М2»	«М1» «с1», «с2», …, «с2019»
«С» «к1», «к2», …, «к2019»	← «К»	«М1» «М2» «с1», «с2», …, «с2019»
«С» «к2», …, «к2019»	→ «К» «к1»	«М1» «М2» «с1», «с2», …, «с2019»
«С» «к2», …, «к2019»	← «К»	«М1» «М2» «с1», «с2», …, «с2019» «к1»
	…	
«С»	→ «К» «к2019»	«М1» «М2» «с1», «с2», …, «с2019» «к1», …, «к2018»
«С»	← «К»	«М1» «М2» «к1», «к2», …, «к2019» «с1», «с2», …, «с2019»
	→ «К» «С»	«М1» «М2» «к1», «к2», …, «к2019» «с1», «с2», …, «с2019»

6 клас ІІ тур

6. Для святкування закінчення навчального року в школі учням шостих класів купили деяку кількість тортів. Між хлопчиками розділили 14 тортів, причому кожен хлопчик отримав однакову кількість торту. Решту тортів розділили порівну між 13 дівчатками, причому кожна дівчинка отримала вдвічі менше торту, ніж хлопчик. Скільки тортів купили, якщо відомо, що хлопчиків на святі було більше, ніж дівчат?

Відповідь: 15.

<u>Розв'язання:</u> Нехай на святі було x хлопчиків, тоді кожен хлопчик з'їв $\frac{14}{x}$ частину торта. За умовою кожна дівчинка з'їла вдвічі менше – $\frac{7}{x}$ частину торта. Оскільки дівчат було 13, то разом вони з'їли $\frac{91}{x}$ частину торта. Так як було куплено цілу кількість тортів, то x – дільник числа 91, тобто одне з чисел: 1, 7, 13, 91. Оскільки хлопців на святі було більше, ніж дівчат, то $x > 13, x = 91$. Значить, дівчата з'їли $\frac{91}{91} = 1$ торт, а всього тортів купили $14 + 1 = 15$.

7. Василь має декілька купюр (більше однієї) на загальну суму 50 гривень. Чи завжди він зможе без решти заплатити 40 гривень, якщо можливі номінали купюр 1, 2, 5, 10, 20 гривень? *(Р. Шлапак)*

Відповідь: Так.

<u>Розв'язання:</u> Припустимо, що Василь не може заплатити 40 гривень без решти. Тоді він не може заплатити і 10 гривень без решти (оскільки 10 = 50 – 40). Значить, у Василя – не більше однієї купюри у 20 гривень, немає купюр у 10 гривень, не більше однієї купюри у 5 гривень, не більше чотирьох купюр у 2 гривні та не більше дев'яти купюр номіналом 1 гривня. Але тоді у нього всього не більше $20 + 5 + 8 + 9 = 42$ гривень, що не відповідає умові. Отже, Василь завжди зможе заплатити 40 гривень без решти.

8. Іринка взяла десять карток з цифрами від 0 до 9 та розташувала їх так, що отримала п'ять чисел у відношенні $1:2:3:4:5$. Вона вирішила показати це подрузі, але виявилось, що картка з цифрою 0 загубилась. Проте Іринка не розгубилась, трохи подумала і отримала нові числа у такому самому відношенні й без цифри 0. Які числа отримала дівчинка першого разу, а які – другого разу? *(Число не може починатися з цифри 0)*

Відповідь: Першого разу – 18, 36, 54, 72, 90; другого разу – 9, 18, 27, 36, 45.

<u>Розв'язання:</u> Помітимо, що Іринка не могла отримати трицифрове число, адже тоді найменше з чисел не менше, ніж 100 : 5 = 20, а карток знадобиться мінімум 11. Значить, першого разу було п'ять двоцифрових чисел, а другого разу – чотири двоцифрових і одне одноцифрове (найменше). Помітимо, що воно не могло бути парним, інакше найбільше з чисел закінчується на 0. Розглянемо

три можливі випадки чисел, які отримала Іринка другого разу: (5, 10, 15, 20, 25); (7, 14, 21, 28, 35); (9, 18, 27, 36, 45). З них підходить лише один – останній. Знайдемо, які числа були спочатку. Пронумеруємо числа в порядку зростання. Перше число не може закінчуватися на 0, оскільки тоді всі інші числа теж закінчуються на 0. Друге число не може закінчуватися на 0, оскільки тоді четверте число теж закінчується на 0. Третє число не може закінчуватися на 0, оскільки тоді перше число теж закінчується на 0. Четверте число не може закінчуватися на 0, оскільки тоді друге число теж закінчуються на 0. Таким чином, на 0 закінчується п'яте число. Оскільки перше число – двоцифрове, то п'яте – не менше 50. Розглянемо п'ять можливих варіантів у порядку спадання чисел: (50, 40, 30, 20, 10); (60, 48, 36, 24, 12); (70, 56, 42, 28,14); (80, 64, 48, 32, 16); (90, 72, 54, 36, 18). Серед них підходить тільки один варіант – останній.

6 клас III тур

9. При яких $n > 3$ на площині можна розташувати n точок та з'єднати їх відрізками так, щоб із кожної точки виходило по 3 відрізки і жодні з цих відрізків не перетиналися?

Відповідь: n – парне число, $n \geq 4$.

<u>*Розв'язання:*</u> Покажемо, що n – не може бути непарним числом. Припустимо, що необхідну конструкцію побудовано. Обчислимо, скільки при цьому проведено відрізків. Оскільки з кожної точки виходить по три відрізки, то з n точок виходить $3n$ відрізків. Але кожен відрізок має два кінці, тобто при такому підрахунку кожен відрізок було враховано двічі. Тому загальна кількість відрізків $3n : 2 = 1{,}5n$, а це число не є цілим при непарних n.

Покажемо тепер, що при n – парних, $n \geq 4$ можна розташувати точки так, щоб виконувалась умова. При $n = 4$ точки можна розташувати так, як зображено на рисунку 2. Для інших парних $n = 2k$ правило побудови наступне: будуємо один k – кутник всередині іншого k – кутника та з'єднуємо відповідні вершини двох k – кутників (приклад для $n = 12$ наведено на рисунку 3).

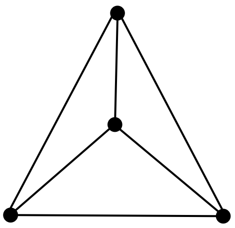


Рис. 2

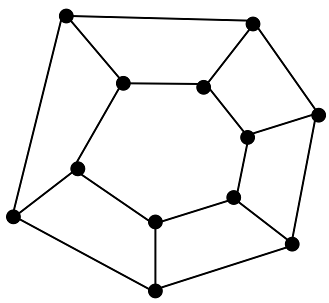
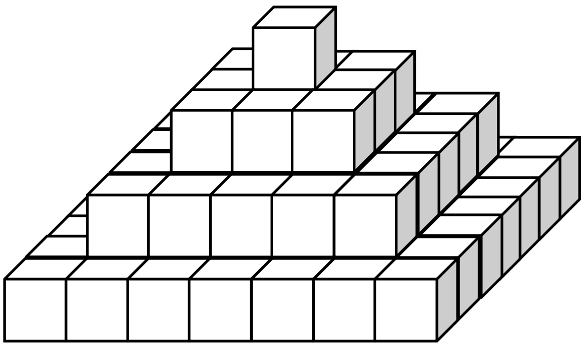


Рис. 3

10. Пірамідка на рисунку складається з білих одиничних кубиків і містить чотири шари: $7 \times 7 \times 1$; $5 \times 5 \times 1$; $3 \times 3 \times 1$ та $1 \times 1 \times 1$. Двоє гравців грають у гру. Перший гравець вибирає будь–який кубик та заливає його повністю жовтою фарбою. За один хід можна залити фарбою будь–який із білих кубиків, що сусідні по грані до кубика, який заливали на попередньому ході. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє при правильній грі? Як він має грати? *(В. Радомський)*



Відповідь: Виграш може собі забезпечити другий гравець.

<u>*Розв'язання:*</u> На рисунку 4 пошарово показано як можна розбити нашу фігуру на цеглинки $1 \times 1 \times 2$, кожна з яких складається з двох однакових кубиків. Перший гравець своїм ходом повністю заливає фарбою один із них. Тоді другий гравець завжди зможе залити другий кубик цієї ж цеглинки. Таким чином, другий гравець завжди зможе зробити хід. У першого гравця ходи закінчаться раніше, ніж у другого.

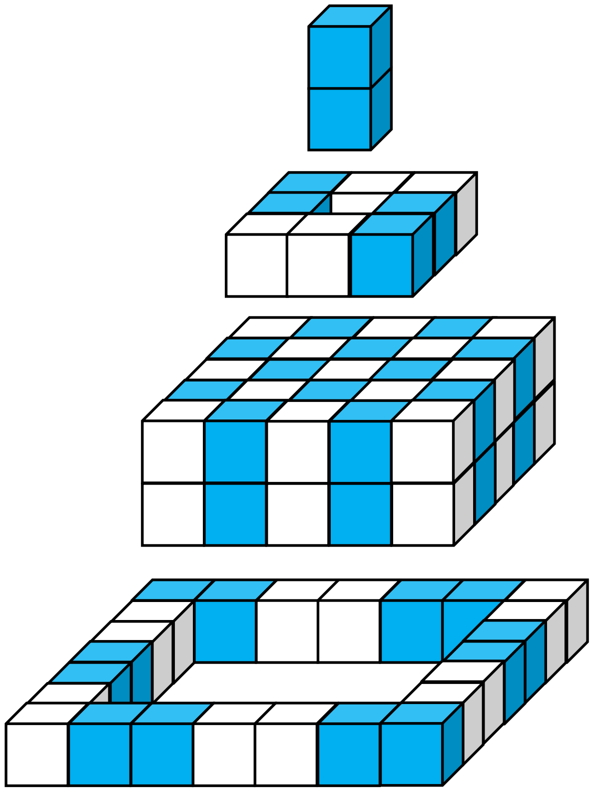
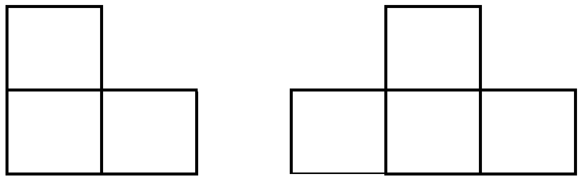


Рис. 4

7 клас

І тур

1. Прямокутник розміру 5×7 розрізали на фігурки, зображені на рисунку, так, що фігурки обох видів присутні в розрізанні. Яка кількість фігурок кожного виду могла опинитися в такому розрізанні? Розгляньте всі випадки.



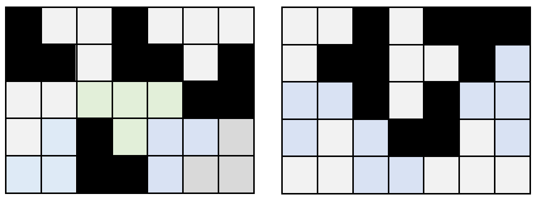
Відповідь: 5 та 5 або 9 та 2.

<u>Розв'язання</u>:

Нехай у розрізанні отримано x фігурок першого та y фігурок другого виду. Загальна площа прямокутника 35 клітинок. *У* фігурках, на які розрізано прямокутник, міститься 3 та 4 клітинки відповідно. Тоді маємо рівняння: $3x + 4y = 35$, де x та y – натуральні числа. Звідки $y = \frac{35-3x}{4}$.

Очевидно, що значення x змінюється від 1 до 11 включно. Перебором переконуємося, що рівняння має три розв'язки: $x = 5$; $y = 5$; $x = 1$; $y = 8$ та $x = 9$; $y = 2$.

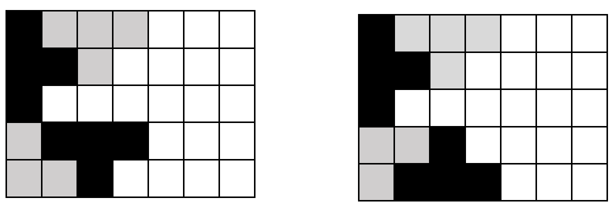
Покажемо, що для значень : $x = 5$; $y = 5$; та $x = 9$; $y = 2$ такі розрізання існують:



Для розв'язку $x = 1$; $y = 8$ такого розрізання не існує. Доведемо це.

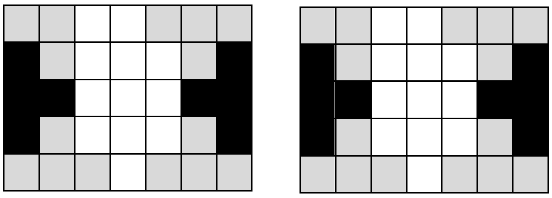
Розглянемо розташування фігурки з 4-х клітинок біля сторони довжиною 5. Очевидно, що достатньо розглянути два випадки: 1) коли вона розташована у крайньому верхньому куточку; 2) займає центральні три клітинки вздовж сторони.

1) у першому випадку розташування першої фігурки з 4-х клітинок змушує поставити фігурку з трьох клітинок вздовж тієї ж сторони прямокутника. Вона може бути розташована двома способами, кожний з яких дозволяє в подальшому розташовувати фігурки з 4-х клітинок лише одним способом (див. рис.), що робить неможливим подальше розташування фігурок, що залишилися:



2) у другому випадку розташування першої фігурки з 4-х клітинок дозволяє продовжити їх розташування двома способами, кожний з яких дозволяє в

подальшому розташовувати фігурки, що залишилися лише одним способом (див. рис.):



Перебором можна показати, що подальше розташування решти фігурок з 4-х клітинок неможливе.

2. Розв’яжіть рівняння: $\frac{26}{3}x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}$.

Відповідь: x = 0,5.

<u>Розв’язання:</u>

Помножимо ліву та праву частину рівняння на 3:

$$26x^3 - 3x^2 - 3x = 1$$
$$27x^3 - x^3 - 3x^2 - 3x = 1$$
$$27x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$
$$27x^3 = (x+1)^3$$
$$3x = x + 1$$
$$2x = 1$$
$$x = 0{,}5.$$

3. Розшифруйте ребус: $\frac{(\text{Л+І+Ц+Е+Й})^2}{\text{Л−І−Ц+Е+Й}} = \text{Л}^{\text{І}^{\text{Ц}^{\text{Е}^{\text{Й}}}}}$, де літери Л; І; Ц; Е; Й належать множині цифр $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ і різним літерам відповідають різні цифри.

Відповідь: $\text{Л} = 5; \text{І} = 2; \text{Ц} = 1; \text{Е} = 3; \text{Й} = 4$ *або* $\text{Л} = 5; \text{І} = 2; \text{Ц} = 1; \text{Е} = 4; \text{Й} = 3$.

<u>Розв’язання:</u>

Оскільки літери Л; І; Ц; Е; Й належать множині цифр $\{1; 2; 3; 4; 5\}$, то $(\text{Л} + \text{І} + \text{Ц} + \text{Е} + \text{Й})^2 = 15^2 = 225$. Тоді перепишемо рівність, задану в умові наступним чином:

$$(\text{Л} - \text{І} - \text{Ц} + \text{Е} + \text{Й}) \cdot \text{Л}^{\text{І}^{\text{Ц}^{\text{Е}^{\text{Й}}}}} = (\text{Л} + \text{І} + \text{Ц} + \text{Е} + \text{Й})^2$$
$$(\text{Л} - \text{І} - \text{Ц} + \text{Е} + \text{Й}) \cdot \text{Л}^{\text{І}^{\text{Ц}^{\text{Е}^{\text{Й}}}}} = 225$$
$$(\text{Л} - \text{І} - \text{Ц} + \text{Е} + \text{Й}) \cdot \text{Л}^{\text{І}^{\text{Ц}^{\text{Е}^{\text{Й}}}}} = 3^2 \cdot 5^2$$

Тоді хоча б один із множників, записаних в лівій частині останньої рівності кратний 5.

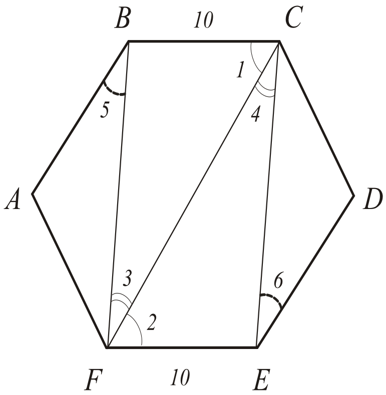
Якщо $\left(Л - І - Ц + Е + Й\right) \vdots 5$, то з урахуванням можливих значень літер єдине значення виразу $Л - І - Ц + Е + Й = 10$, чого бути не може, оскільки права частина останньої рівності не кратна 10.

Якщо $Л^{І^{Ц^{Е^{Й}}}} \vdots 5$, то $Л = 5$. Тоді, враховуючи попередні міркування, $І = 2, Ц = 1$. Маємо $Л^{І^{Ц^{Е^{Й}}}} = 5^{2^{1^{Е^{Й}}}}$, звідки $Е = 3, Й = 4$ або $Е = 4, Й = 3$. Перевіркою переконуємося, що отримані значення задовольняють умову $Л - І - Ц + Е + Й = 9$, тобто $\left(Л - І - Ц + Е + Й\right) \cdot Л^{І^{Ц^{Е^{Й}}}} = 3^2 \cdot 5^2$.

4. Протилежні сторони опуклого шестикутника попарно паралельні. Чотири з них дорівнюють по 10 см, п'ята – 11 см. Знайдіть довжину шостої сторони. (*М.Хасін*)

Відповідь: 11 см.

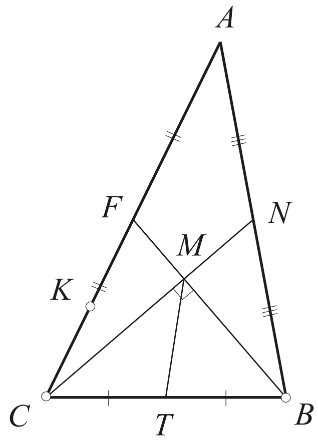
<u>*Розв'язання*</u>:



Оскільки рівних сторін чотири, то якісь дві з них паралельні. Нехай $BC = EF = 10$ см, також $BC \parallel EF$ за умовою (див. рисунок). Тоді з'єднаємо B і F, C і E. $\Delta BCF = \Delta EFC$ – за двома сторонами та кутом між ними ($BC = EF = 10$ см; CF – спільна сторона і $\angle 1 = \angle 2$ – внутрішні різносторонні).
Отже, $BF = CE$ і $\angle 3 = \angle 4$. Оскільки $\angle AFC = \angle DCF$ ($CD \parallel AF$) і $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle AFB = \angle DCE$. До того ж, $\angle 5 = \angle 6$ (кути з відповідно паралельними прямими). Таким чином, $\Delta AFB = \Delta DCE$ – за стороною та двома прилеглими кутами. Тоді $AB = DE$ і $CD = AF$. Нехай $CD = AF = 10$ см, тоді $AB = DE = 11$ см. З цього випливає: шоста сторона дорівнює 11 см.

5. Побудувати трикутник *ABC* за вершинами *C* і *B* та довільною точкою *K* на стороні *AC*, якщо відомо, що медіани *BF* і *CN* взаємно перпендикулярні. (*Г.Філіпповський*)

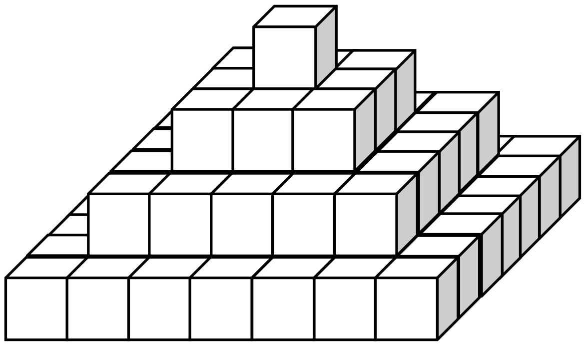
<u>*Розв'язання:*</u>



Аналіз показує: якщо M – центроїд трикутника ABC (точка перетину BF і CN), то $\angle BMC = 90°$ (див. рисунок) і $MT = \frac{BC}{2}$ (T – середина BC). Тоді медіана $AT = \frac{3}{2}BC$ і засічка з точки T розхилом циркуля, що дорівнює $\frac{3}{2}BC$, перетне промінь CK в шуканій вершині A.

II тур

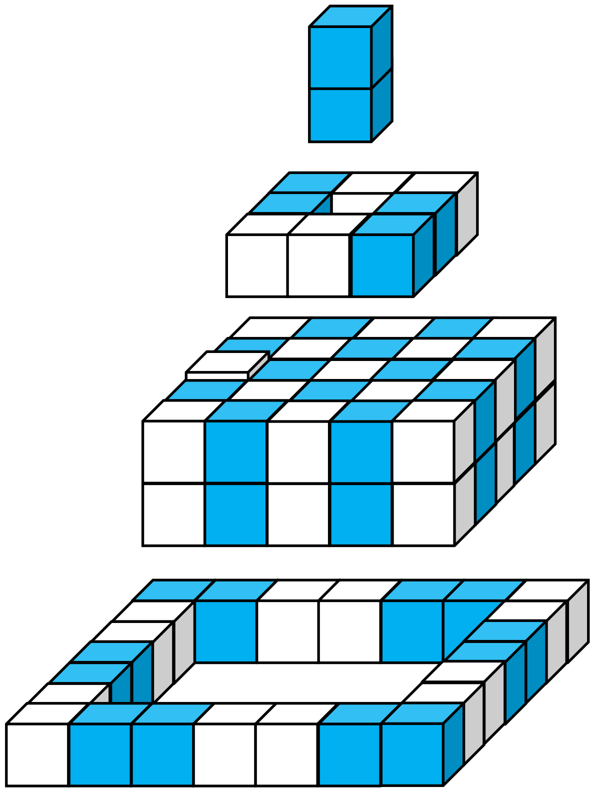
6. Пірамідка на рисунку складається з білих одиничних кубиків і містить шари $7 \times 7 \times 1$, $5 \times 5 \times 1$, $3 \times 3 \times 1$ та $1 \times 1 \times 1$. Двоє гравців грають у гру. Перший гравець вибирає будь–який кубик та заливає його повністю жовтою фарбою. За один хід можна залити фарбою будь–який із білих кубиків, що сусідні по грані до кубика, який заливали на попередньому ході. Програє той, хто не може зробити хід. Хто може виграти при правильній стратегії? *(В.Радомський)*



Відповідь: Виграш може собі забезпечити другий гравець.

<u>Розв'язання:</u>

На рисунку пошарово показано як можна розбити нашу фігуру на цеглинки $1 \times 1 \times 2$, кожна з яких складається з двох однакових кубиків. Перший гравець своїм ходом повністю заливає фарбою один із них. Тоді другий гравець завжди зможе залити другий кубик цієї ж цеглинки. Таким чином, другий гравець завжди зможе зробити хід. У першого гравця ходи закінчаться раніше, ніж у другого.



7. 16 шахістів провели між собою турнір: кожні два з них зіграли між собою рівно одну партію. За перемогу в партії давався 1 бал, за нічию – по 0,5 бала, за програш – 0 балів. Виявилося, що рівно 15 шахістів поділили між собою перше місце. Скільки очок міг набрати 16–й шахіст?

Відповідь: 0 балів.

<u>Розв'язання:</u>

Нехай перші 15 шахістів набрали по a балів, а шістнадцятий – b балів. Очевидно, що $a > b$.

Всього було зіграно $\frac{15 \cdot 16}{2} = 120$ партій. Кожна партія розігрувала рівно 1 бал, отже було розіграно рівно 120 балів. Тоді $15a + b = 120$, звідки $15a \leq 120$, тобто $a \leq 8$.

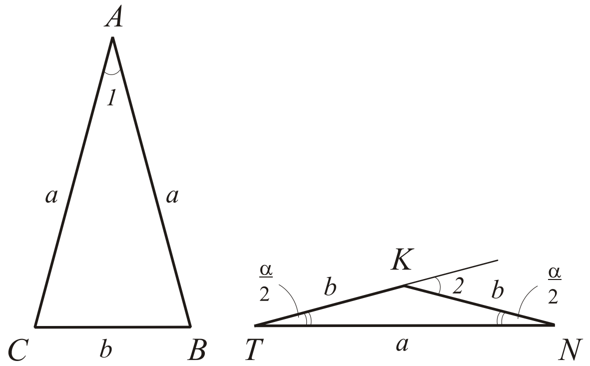
З іншого боку,

$$15a + b < 15a + a$$
$$15a + b < 16a$$
$$120 < 16a$$
$$7{,}5 < a$$

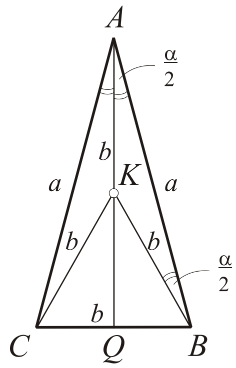
Таким чином, $a = 8$, тоді $b = 0$.
Така ситуація справді можлива, якщо 15 гравців зіграють між собою внічию, і виграють у шістнадцятого.

8. Сторони одного рівнобедреного трикутника дорівнюють $a;\ a;\ b,$ а другого: $b;\ b;\ a$, де $a > b$. Кут при вершині першого трикутника дорівнює зовнішньому куту при вершині другого. Знайдіть цей кут. (*С. Яковлєв*)

Відповідь: 30°.
<u>Розв'язання:</u>



Нехай сторони ΔABC дорівнюють $a;\ a;\ b,$ а ΔKNT – $b;\ b;\ a$ – див. рисунок.
Нехай також $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$. Тоді кути при вершинах основи ΔKNT дорівнюють по $\frac{\alpha}{2}$. Сумістим вершини T і N з вершинами A і B і відкладемо ΔTNK всередину ΔABC. Отримаємо ΔAKB зі сторонами $b;\ b;\ a$ і кутами $\frac{\alpha}{2}$ при основі. Тоді $\angle CAK = \frac{\alpha}{2}$ и $\Delta AKC = \Delta AKB$ – за двома сторонами і кутом між ними. Отже, в ΔBKC всі сторони рівні і він – рівносторонній. Але $\angle CKQ = \alpha$ (зовнішній для ΔAKC). Аналогічно $\angle BKQ = \alpha$. Тоді $2\alpha = 60^\circ$ і $\alpha = 30^\circ$.



III тур

9. Обчислити значення виразу: $\dfrac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(19^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(20^4+\frac{1}{4}\right)}$.

Відповідь: $\frac{1}{841}$.

<u>Розв’язання:</u>

Домножимо чисельник і знаменник цього дробу на 2^4. Отримаємо:

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(19^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(20^4+\frac{1}{4}\right)}=\frac{(2^4+4)(6^4+4)\cdot\ldots\cdot(38^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)\cdot\ldots\cdot(40^4+4)}$$

Розкладемо на множники вираз:

$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-4n^2=$

$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)=((n-1)^2+1)((n+1)^2+1).$

Скористаємося отриманою формулою для нашого дробу:

$$\frac{(2^4+4)(6^4+4)\cdot\ldots\cdot(38^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)\cdot\ldots\cdot(40^4+4)}==\frac{(1^2+1)(3^2+1)\cdot\ldots\cdot(39^2+1)}{(3^2+1)\cdot(5^2+1)\cdot\ldots\cdot(41^2+1)}=\frac{1}{841}.$$

8 клас

1. Знайти всі такі прості числа r, l та натуральне число w, для яких справджується рівність: $r^l + l^r - 1 = 4^w$. *(П. Козаровицька)*

Відповідь: (3, 2, 2), (2, 3, 2).

Розв'язання:

Оскільки права частина цього виразу парна, одне з чисел r або l є парним. Нехай l парне. Оскільки за умовою ці числа прості, $l = 2$. Тепер рівність виглядає наступним чином: $r^2 + 2^r - 1 = 4^w$.

Розглянемо подільність правої частини на 3. Оскільки $r \neq 2$, r – непарне. Тому $2^r \equiv 2 \pmod 3$. Отримуємо, що $r^2 \equiv 0 \pmod 3$. Оскільки r просте за умовою, то $r = 3$. Підставляємо це в умову і отримуємо, що $w = 2$. Отже, $w = 2, r = 3, l = 2$.

2. Квадрат зі стороною 1 розрізали на прямокутники. В кожному прямокутнику обрали одну з двох менших сторін (якщо прямокутник – квадрат, то обирається будь–яка з чотирьох сторін). Доведіть, що сума довжин усіх обраних сторін не менша 1.

Доведення:

Нехай квадрат розрізано на n прямокутників зі сторонами a_1, b_1; ...; a_n, b_n, де $a_1 \le b_1$, ..., $a_n \le b_n$. Площа даного квадрата дорівнює сумі площ всіх прямокутників, на які його розрізали, і дорівнює 1. Тому можна записати наступну рівність:

$$b_1a_1 + b_2a_2 + \dots + b_na_n = 1$$

У кожному прямокутнику зі сторонами b_i та a_i більша сторона $b_i \le 1$, тому отримаємо наступну нерівність: $b_i a_i \le a_i$. Запишемо суму таких нерівностей для всіх прямокутників:

$$b_1a_1 + b_2a_2 + \dots + b_na_n \le a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
$$1 \le a_1 + a_2 + \dots + a_n ,$$

що необхідно було довести.

3. Маємо дві ємності. В одній 1 літр води, а інша – порожня. Послідовно проводяться переливання з першої ємності до другої, з другої до першої і так далі. Кожного разу частина води, що переливається, складає ½, ⅓, ¼, і т.д. від кількості води в ємності, з якої вода переливається. Скільки води буде в ємностях після 2019 переливань?

Відповідь: ½ літра.

Розв'язання:

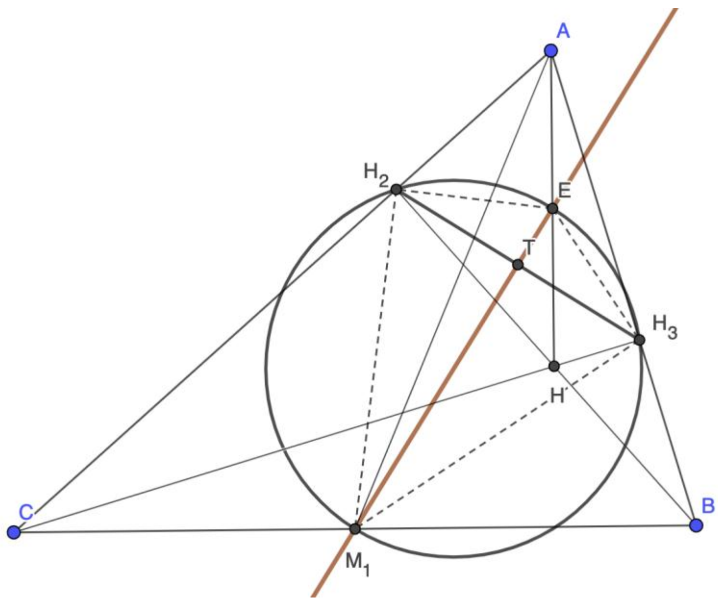
Підрахувавши декілька перших переливань, не важко помітити, що після першого, третього, п'ятого переливань в обох ємностях буде по ½ літра води. Необхідно довести, що так буде після будь–якого переливання з непарним номером.

Якщо після переливання з непарним номером $2k$–1 в ємностях було по ½ літра, то при наступному переливанні з другого береться $\frac{1}{2k+1}$ частина, а в першій ємності отримуємо $\frac{1}{2}+\frac{2}{2(2k+1)}=\frac{k+1}{2k+1}$літра.

При наступному переливанні, що матиме номер 2k+1, з нього буде братися $\frac{1}{2k+2}$ води та залишається $\frac{k+1}{2k+1}-\frac{k+1}{(2k+1)(2k+1)}=\frac{1}{2}$ води. Тому після сьомого, дев'ятого и будь-якого непарного переливання в ємностях буде по ½ літра води.

4. У трикутнику *ABC* позначили середину відрізка між вершиною *A* і ортоцентром трикутника *ABC* та середину відрізка між основами висот, що проведені з вершин *B* і *C*. Довести, що ці дві точки та основа медіани, проведеної з вершини *A*, лежать на одній прямій. (*Фольклор*)

Доведення:



Позначимо точкою M_1 середину сторони *CB*, а точкою *E* – середину *AH*. Відрізок M_1E перетне H_2H_3 в точці *T*. Доведемо, що точка *T* – середина відрізка H_2H_3. Точки H_2, H_3, M_1 та *E* лежать на одному колі (коло дев'яти точок).

Трикутник AH_2H – прямокутний, а H_2E – медіана, проведена до гіпотенузи. Отже $AE = EH = H_2E$. Аналогічно з іншої сторони $AE = EH = H_3E$.

Трикутник CH_2B – прямокутний, а H_2M_1 – медіана проведена до гіпотенузи.

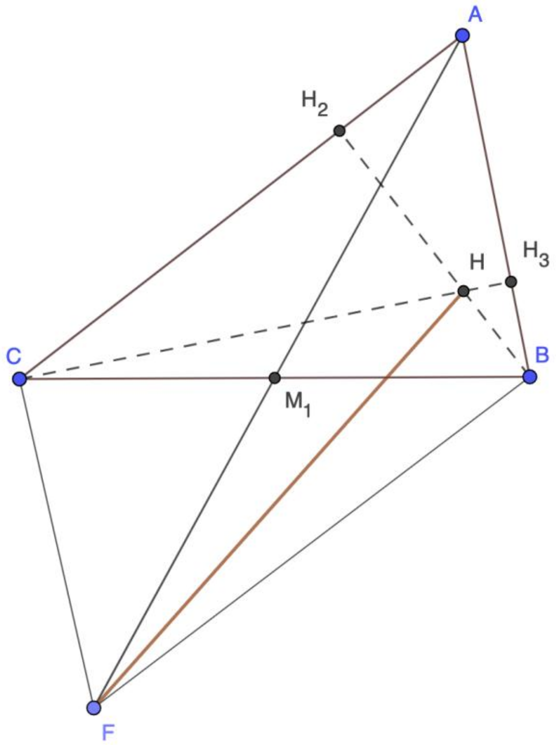
Отже $CM_1 = M_1B = H_2M_1$. Аналогічно $CM_1 = M_1B = H_3M_1$ (у трикутнику CH_3B).

Оскільки $H_2E = H_3E$, $H_2M_1 = H_3M_1$, то чотирикутник $EH_2M_1H_3$ – дельтоїд. А тому $EM_1 \perp H_2H_3$.

Трикутник H_2EH_3 – рівнобедрений, *ET* – висота і медіана. А тому *T* – середина H_2H_3.

5. У гострокутному трикутнику ABC радіус описаного кола дорівнює R. Медіану AM_1 подвоїли (за точку M_1) та отримали точку F. Знайти довжину відрізка FH, де H – ортоцентр трикутника ABC. (*Г. Філіпповський*)

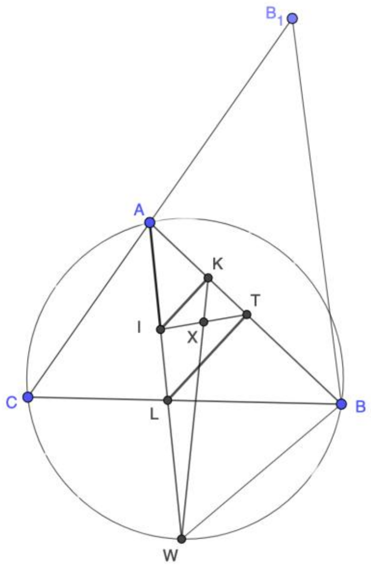
Доведення:



Не важко помітити, що $ABFC$ – паралелограм та $\angle BFC = \angle A$.
Оскільки $\angle BHC = 180^o - \angle A$, а тому $\angle BFC + \angle BHC = \angle A + 180^o - \angle A = 180^o$. З чого випливає, що чотирикутник $BHCF$ – можна вписати в коло.
$\angle H_3CB = 90^o - \angle B$ (з трикутника CH_3B).
Оскільки $CF \parallel BA$, то $\angle BCF = \angle B$.
А тому $\angle H_3CB + \angle BCF = 90^o$, тобто HF – діаметр кола, описаного навколо трикутника BFC.
Оскільки трикутник CFB та трикутник BAC рівні, то і радіуси описаних кіл в них рівні. А тому $HF = 2R$.

6. У трикутнику ABC з інцентра I провели перпендикуляр до сторони AB, який перетнув її у точці K. З основи бісектриси кута A провели ще один перпендикуляр до тієї ж сторони AB, який перетнув її у точці Т. Доведіть, що відрізок IT ділиться прямою KW навпіл, де W є точкою перетину продовження бісектриси кута A з описаним колом трикутника ABC. (*Д. Басов*)

Доведення:



Застосуємо теорему Менелая для $\Delta\ AIT$ та прямої WK:

$$\frac{AW}{IW}\cdot\frac{KT}{AK}\cdot\frac{XI}{TX}=1 \qquad (1)$$

Оскільки $IK \parallel LT$, то за теоремою Фалеса $\frac{AK}{KT}=\frac{AI}{IL}$, а за властивістю інцентра , $\frac{AI}{IL}=\frac{b+c}{a}$ отже $\frac{AK}{KT}=\frac{b+c}{a}$ (де a, b, c – довжини сторін $\Delta\ ABC$ навпроти відповідних кутів).

Оскільки за теоремою про "трилистник" $IW = BW$, то $\frac{AW}{IW}=\frac{AW}{BW}$.

Продовжимо CA так, що $CB_1 = b + c$, тоді $\Delta\ CB_1B$ подібний до $\Delta\ AWB$ (за І ознакою)

$\angle B_1CB = \angle AWB$, $\angle CB_1B = \angle WAB$

Звідки отримуємо $\frac{AW}{BW}=\frac{CB_1}{CB}=\frac{b+c}{a}$.

Підставивши отримані значення відношень до рівності (1) матимемо наступне:

$$1=\frac{AW}{IW}\cdot\frac{KT}{AK}\cdot\frac{XI}{TX}=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{a}{b+c}\cdot\frac{XI}{TX}$$

Отже $XI = TX$, що необхідно було довести.

9–10 клас (командна)

1. На дошці виписано в рядок усі натуральні числа від 1 до 2019. Чи можна записати під ними ці самі числа в іншому порядку так, щоб сума чисел у кожному стовпчику була точним квадратом?

Відповідь: можна, наприклад так: 3, 2, 1, 96, 95, ..., 4, 2019, 2018, ..., 98, 97.
Розв'язання:
Помітимо, що $46^2 = 2116 = 2019 + 97$. Тому, записавши під числами 97, 98, …, 2019 ці ж числа у зворотному порядку, одержимо те, що треба. Аналогічно, якщо під числами 4, 5, …, 96 записати ці ж числа у зворотному порядку, то в кожному стовпчику отримаємо суму $100 = 10^2$. Залишилось під числами 1, 2, 3 записати ці ж числа у зворотному порядку, отримавши суму $4 = 2^2$.

2. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел x, y, z таких, що $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, виконується нерівність: $\sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} + \sqrt{y+x} \leq \sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}$.
(П. Козаровицька)

Доведення:
1) За нерівністю трьох квадратів маємо: $1 = \frac{xy+yz+xz}{xyz} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$.
2) З умови випливає, що числа x, y, z більші за 1. Тоді $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{x}$; $y + z = \frac{x-1}{x} \cdot yz$; $\sqrt{y+z} = \sqrt{xyz} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$. Аналогічно перетворюються два інші доданки.
3) За нерівністю Коші-Буняковського: $\sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} + \sqrt{y+x} =$

$$= \sqrt{xyz} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{z}} \right) \leq$$

$\leq \sqrt{xyz} \cdot \sqrt{\frac{1}{\mathrm{x}} + \frac{1}{\mathrm{y}} + \frac{1}{\mathrm{z}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{z}} = \sqrt{xyz} \cdot \sqrt{1} \cdot \sqrt{2} \leq$
$\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}$ за доведеним у пункті 1).

3. Нехай $p(x)$ – деякий невироджений поліном із цілими коефіцієнтами. Послідовність (a_i) будується таким чином: $a_0 = 0$, $a_{k+1} = p(a_k)$, $\forall\, k \geq 0$. Для двох довільних натуральних чисел $n > m$ обчисліть значення НСД(a_n, a_m) через елементи послідовності (a_i).

Розв'язання:

Позначимо $p_1(x) = p(x)$, $p_{i+1}(x) = p(p_i(x))$. Тоді для довільних n та m ($n > m$) маємо $a_n = p_n(0) = p_m(a_{n-m}) = p_{n-m}(a_m)$. За теоремою Безу для довільного полінома $Q(x)$ та довільного значення α має місце співвідношення $Q(x) = R(x) \cdot (x - \alpha) + Q(\alpha)$, де $R(x)$ – деякий поліном.
Взявши $Q(x) = p_m(x)$, $\alpha = a_{n-m}$, одержимо:
$p_m(x) = R(x) \cdot (x - a_{n-m}) + p_m(a_{n-m}) = R(x) \cdot (x - a_{n-m}) + a_n$.
Поклавши $x = 0$, маємо: $a_m = p_m(0) = R(0) \cdot (-a_{n-m}) + a_n$,
або $a_n = a_m + a_{n-m} \cdot R(0)$, де $R(0)$ – ціле.
Аналогічно, розглядаючи $Q(x) = p_{n-m}(x), \alpha = a_m$, одержимо:
або $a_n = a_{n-m} + a_m \cdot R'(0)$, де $R'(0)$ – ціле. З двох отриманих співвідношень випливає, що НСД(a_n, a_m)= НСД(a_m, a_{n-m}). Отже, якщо запустити алгоритм Евкліда для обчислення НСД(a_n, a_m), то він буде фактично працювати лише з індексами елементів послідовності, і врешті решт поверне
НСД(a_n, a_m)= НСД$\left(a_{\text{НСД}(n,m)}, a_0\right) = a_{\text{НСД}(n,m)}$.

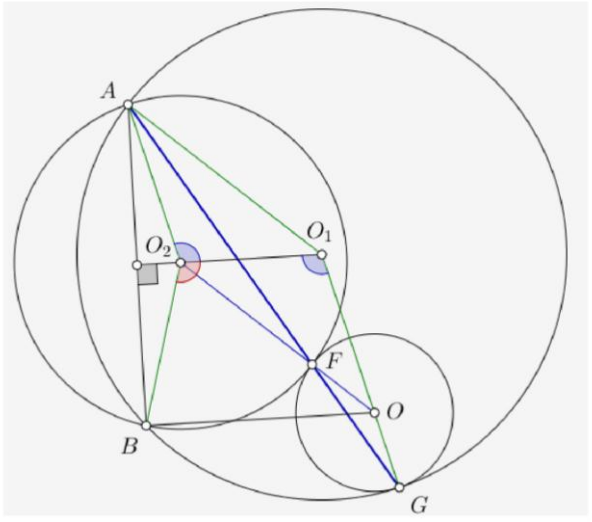
4. Про дійсні числа a та b відомо, що $\{a^2 + b\} = \{b^2 + a\} = \frac{1}{2019}$, де $\{x\}$ позначає дробову частину числа x. Доведіть, що обидва числа ірраціональні. *(Т. Тимошкевич)*

<u>*Доведення*</u>:
Зауважимо, що числа a та b одночасно або раціональні, або ірраціональні, що випливає з умови. Нехай вони раціональні: $a = \frac{n}{m}, b = \frac{u}{v}$, де n, m, а також u, v – взаємнопрості.
З умови випливає, що число $(\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}) - (\mathrm{b}^2 + \mathrm{a})$ - ціле. $(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2) + (b - a) =$
$= (a - b)(a + b - 1) = \left(\frac{n}{m} - \frac{u}{v}\right)\left(\frac{n}{m} + \frac{u}{v} - 1\right) = \frac{(nv-um)(nv+um-mv)}{m^2v^2}$ – ціле число.
Оскільки чисельник ділиться на m^2, а n, m – взаємно прості, то $n^2v^2 \vdots m^2$ і $v^2 \vdots m^2$. Аналогічно, $u^2m^2 \vdots v^2$ і $m^2 \vdots v^2$. Отже, $m = \pm v$. Розглянемо випадок $m = v$, інший випадок розглядається аналогічно.
З умови випливає, що число $\mathrm{a}^2 + \mathrm{b} - \frac{1}{2019}$ – ціле.
Отже, $\frac{n^2}{m^2} + \frac{u}{m} - \frac{1}{2019} = \frac{2019n^2+2019mu-m^2}{2019m^2}$ – ціле число. Оскільки $2019 \vdots 3$, то й $m^2 \vdots 3$. Але тоді й $n^2 \vdots 3$, що неможливо, оскільки n, m – взаємно прості. Отже, числа a та b не можуть бути раціональними. Значить, вони обидва – ірраціональні.

5. Два кола перетинаються у точках A та B. Третє коло із центром у точці O дотикається до першого кола у точці F зовнішнім чином, а до другого - у точці

G внутрішнім чином. Доведіть, що якщо AFG - пряма, то кут ABO - прямий. *(Ю. Білецький)*

<u>*Доведення*</u>:



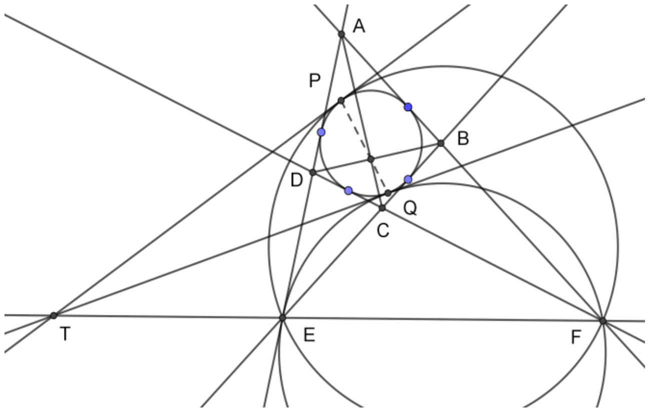
З того, що AFG - пряма, виходить, що радіуси AO_1 та FO паралельні. Також паралельні радіуси OG та AO_2. Тоді фігура AO_1OO_2 – паралелограм (звідки також можна побачити, що сума радіусів кіл O та O_2 дорівнює радіусу кола O_1).

Тоді OO_1 дорівнює BO_2.

Кут OO_1O_2 дорівнює куту AO_2O_1 та куту O_1O_2B. Тоді фігура BO_2O_1O – рівнобедрена трапеція, звідки отримуємо, що кут OBA - прямий.

6. Протилежні сторони чотирикутника $ABCD$ перетинаються у точках E та F, а коло ω вписано у $ABCD$. Нехай P та Q - точки дотику до кола ω двох кіл ω_1 та ω_2, які обидва проходять через точки E та F. Доведіть, що пряма PQ проходить через точку перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$. *(М. Плотніков)*

<u>*Доведення*</u>:

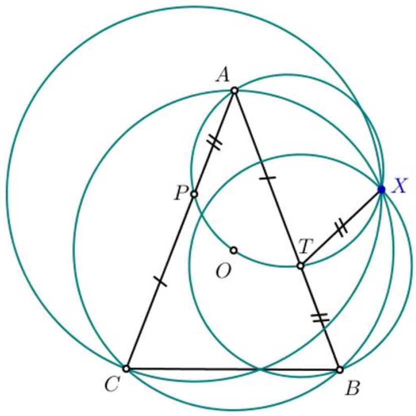


Радикальною віссю кіл ω_1 та ω_2 є пряма EF, радикальними осями для пар кіл ω_1, ω та ω_2, ω є спільні дотичні, що проходять через точки P та Q відповідно, а тому зазначені три прямі перетинаються в одній точці (назвемо її Т). Точка T є полюсом прямої PQ, тому досить довести, що поляра точки перетину діагоналей проходить через точку T. Цією полярою є пряма EF.

7. У рівнобедреному трикутнику ABC на бічних сторонах AB та AC взято точки T та P відповідно, причому $TB = PA$. Проведено кола із центрами T і P та радіусами TB і PC відповідно, а також коло через точки A, T та P. Довести, що ці три кола мають спільну точку. *(Ю. Білецький)*

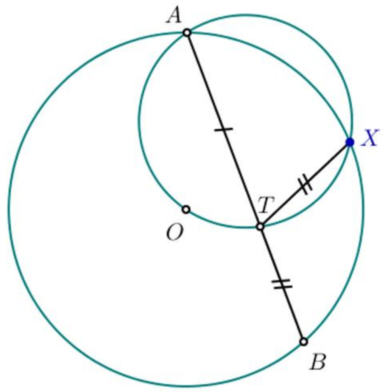
Доведення:

Лема. Якщо в рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB провести довільно коло через точки A та O (центр описаного кола), то це коло перетне AB у точці T, AC у точці P так, що $TB = PA$. І навпаки. (Доведіть лему самостійно).



За результатами леми третє коло нашої задачі (коло APT) проходить через центр описаного кола. Проведемо описане коло і доведемо, що дані в умові три кола перетинаються на описаному навколо ABC колі.

Дійсно, нехай третє коло нашої задачі перетинає описане коло у точці X. Доведемо, що дане в умові коло з центром T також проходить через X. Для цього скористаємося результатом ще однієї леми.



Лема Архімеда про центр одного кола на іншому:

Якщо два кола перетинаються у точках A та X, і центр O першого кола належить другому колу, то довільна січна, проведена через точку A, перетинає перше коло у точці T, а друге – у точці В, таких що $TX = TB$.

Згідно з лемою Архімеда стає очевидним, що дане в нашій задачі коло з центром T проходить через точку X. Аналогічно дане коло з центром P також проходить через точку X.

8. Нехай M_1 та M_2 - середини двох сторін трикутника ABC, L_1 та L_2 - основи відповідних бісектрис, а W_1 та W_2 - точки перетину продовжень цих бісектрис із описаним колом. Виявилось, що прямі W_1M_2, W_2M_1 та L_1L_2 перетинаються в одній точці. Визначити вид трикутника ABC. *(О. Карлюченко, А. Башкиревич)*

Розв'язання:

Розглянемо трикутники $M_1W_1L_1$ та $W_2M_2L_2$: M_1L_1 перетинається з W_2L_2 в точці B; L_1W_1 із L_2M_2 - в точці A; M_1W_1 *із* W_2M_2 в точці O – центрі описаного кола. Згідно з теоремою Дезарга точки B, A, O лежать на одній прямій, тобто трикутник ABC - прямокутний с прямим кутом C.