XXII олімпіада з математики Русанівського ліцею

2017 р.

6 клас

І тур

1. У крамниці Алі-Баби було два мішки рису, які коштували однаково. Вартість рису в першому мішку 20 динарів за кг, а в другому – 30 динарів за кг. Сталося так, що мішки порвалися, і весь рис змішався. Та розумний Алі-Баба зміг обчислити, за якою ціною необхідно продавати рис, щоб отримати таку саму суму грошей. А ви зможете?

Розв'язання:

Нехай ціна за кожен мішок рису – x. Тоді сумарна вартість – $2x$. Тоді сумарна вага рису першого ґатунку – $\frac{x}{20}$, а другого – $\frac{x}{30}$. Тоді, якщо розділимо всю вартість на всю масу, отримаємо ціну за кілограм «змішаного» рису, тобто:

$$\frac{2x}{\frac{x}{20}+\frac{x}{30}} = \frac{2x}{\frac{3x}{60}+\frac{2x}{60}} = \frac{120x}{5x} = 24 \text{ динара.}$$

Відповідь: 24 динара за кілограм.

2. Грицько та Іринка по черзі їдять сунички. Грицько їсть одну, потім Іринка їсть дві, Грицько – три, і так далі на одну суничку більше кожного разу. Якщо комусь не вистачить ягід для необхідної кількості, то він з'їдає всі, що залишилися. Відомо, що Грицько куштував сунички останнім і всього з'їв 101 суничку. Скільки ягід скуштували діти разом?

Розв'язання:

Легко помітити, що Грицько їв лише непарну кількість суничок можливо, крім останнього разу. Тоді $1+3+5+\ldots+19=100$, що означає, що останнього разу хлопчик з'їв ще одну ягідку. Тобто Іринка куштувала лише парну кількість суничок, тобто $2+4+6+\ldots+20=110$. Тобто загальна кількість ягід – 211.

Відповідь: 211 суничок.

3. На експертизу Шерлоку Холмсу принесли п'ять монет номіналом в 1, 2, 3, 5 та 10 динарів. Він швидко визначив, що одна з них фальшива, тобто цифра на монеті не відповідає її масі в грамах. Як йому знайти фальшиву монету за три зважування на чашкових терезах без важків?

Розв'язання:

Перше зважування: $2+3+5$ та 10.

Якщо вага рівна, то 1 – фальшива. Якщо не рівна, то переходимо до другого зважування.

Друге зважування: $2+3$ та 5.

Якщо вага рівна, то 10 – фальшива. Якщо ж ні, то із першого зважування ми знаємо, що 10 – справжня, тобто ми знаємо фальшива легша чи важча за номінал. Без обмеження загальності будемо вважати, що фальшива легша. Якщо тепер 5 легша, то вона є фальшивою. Якщо ж ні – то переходимо до третього зважування.

Третє зважування: $1+2$ та 3.

Якщо 3 легша, то 3 – фальшива. Якщо ж ні, то 2 – фальшива.

4. На дошці виписані підряд всі цифри від 9 до 1. Дмитрик ставить між деякими з них знак «+», а інші склеює, після чого обчислює значення отриманого виразу (наприклад, $98+7+65+432+1=603$). Яке найбільше трицифрове число може отримати Дмитрик?

Розв'язання:

$9+8+7+654+321=999$, що очевидно є найбільшим тризначним числом.

Відповідь: 999.

5. У школі 250 учнів та 125 парт. Рівно половина дівчат сидять за партою з хлопцями. Чи можна пересадити учнів так, щоб половина хлопців сиділа за партою з дівчатами?

Розв'язання:

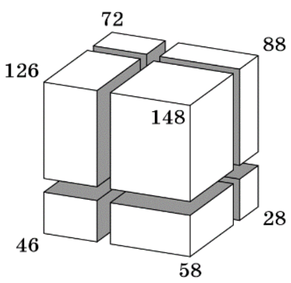
Помітимо, що кількість дівчат – парна, бо за умовою половина сидить за партами з хлопцями. Також помітимо, що і половина дівчат – парна кількість, бо вони сидять по двоє. Що означає, що кількість дівчат ділиться на 4 націло. Якщо ж можна пересадити учнів так, як сказано в умові, то, з аналогічних міркувань, і кількість хлопців повинна буде ділитися на 4. Це означає, що загальна кількість дітей повинна ділитися на 4, але 250 на 4 не ділиться, тобто так пересадити не можливо.

Відповідь: не можна.

II тур

6. Дерев'яний брусок розпилили на вісім менших брусків, як показано на рисунку. Відома площа поверхні семи з них (в см2). Знайдіть площу поверхні восьмого бруска.

Розв'язання:



Можна помітити, що площа поверхні всього куба рівна сумі площ поверхонь брусків з площею 72, 148, 46 та 28. А також сумі інших чотирьох брусків. Нехай площа 8-го бруска рівна x. Тоді $x+58+126+88=72+148+46+28$ (повна поверхня куба однакова, тобто не залежить від способу її підрахування). Тоді $x=22$.

Відповідь: 22 см^2.

7. Батьки Сашка купили дві свічки до його дня народження однакової висоти, але різної товщини. Одна з них згорає за чотири години, а інша – за дві. Коли Сашко загадав бажання та загасив свічки, то одна була втричі коротша за іншу. Скільки часу горіли свічки?

Розв'язання:

Нехай за час горіння товста свічка зменшилась в x разів, тоді тонка зменшилась в $2x$ разів. Візьмемо висоту свічки за 1, тоді маємо рівняння:

$1-x\cdot 1=3(1-2x\cdot 1)$,

розв'язуючи яке отримуємо, що $x=0{,}4$, тобто $0{,}4\cdot 4\text{год}=1{,}6\text{ год}=96$ хв.

Відповідь: 1,6 години або 96 хвилин.

8. У дивовижній країні в Дивному обмінному пункті можна виконати лише дві операції:

1) обміняти 5 динарів на 3 рупії та цукерку в подарунок;

2) обміняти 2 рупії на 3 динари та цукерку в подарунок.

Коли мандрівник прийшов в обмінний пункт, у нього були тільки динари. Після здійснення кількох операцій динарів у мандрівника стало менше, рупії так і не з'явилися, зате він отримав 50 цукерок. Скільки динарів коштували мандрівнику ці цукерки?

Розв'язання:

Те, що мандрівник заходив без рупій та вийшов без них, означає, що деяку кількість динарів він поміняв на рупії і всі рупії, які отримував, поміняв на динари. Тоді помітимо, що отримувати рупії мандрівник може лише по 3, а віддає тільки по 2. Тобто для того, щоб у нього не залишилося рупій кількість операцій №1 повинна була бути парною і без обмеження загальності можемо замінити першу операцію на нову:

3) обміняти 10 динарів на 6 рупій та 2 цукерки в подарунок.

Але тоді для кожної операції №3 необхідно буде виконати колись 3 рази операцію №2, тобто можемо замінити її на іншу:

4) обміняти 6 рупій на 9 динарів та 3 цукерки в подарунок.

Це означає, що для кожних 10 динарів мандрівник виконує 3-тю та 4-ту операції, тобто отримати 9 динарів та 5 цукерок. А всього він отримав 50 цукерок, тобто 3-тю та 4-ту операції виконав $50 : 5 = 10$ разів, при чому кожного разу кількість динарів вменшувалася на 1. Це означає, що загальна вартість цукерок рівна $10 \cdot 1 = 10$ динарів.

Відповідь: 10 динарів.

7 клас
I тур

1. Цілі числа a, b, c і d задовольняють рівність $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Доведіть, що число abc ділиться націло на 4.

Розв'язання:

Квадрат парного числа ділиться націло на 4, а квадрат непарного числа дає остачу 1 при діленні на 4. Якщо числа a, b, c – непарні, то d^2 має давати остачу 3 при діленні на 4, що неможливо. Якщо серед чисел a, b, c два непарних і одне парне, то d^2 має давати остачу 2 при діленні на 4, що також неможливо. Отже, серед чисел a, b, c є хоча б два парних. Тому добуток abc ділиться на 4.
Такі числа існують, наприклад, $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$.

2. На прямій відмітили 100 різних точок. Для кожної точки обчислили суму відстаней від даної точки до всіх інших. Чи можуть всі 100 отриманих чисел бути різними?

Розв'язання:

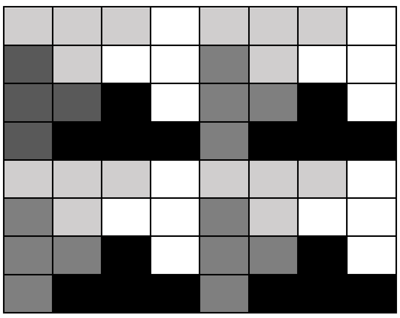
Занумеруємо точки в порядку, в якому вони лежать на прямій (зліва-направо). При переході від 50-ї точки до 51-ї рівно 50 відстаней зменшуються на відстань між 50-ою та 51-ою точками, і рівно 50 відстаней збільшуються на цю ж саму величину. Отже, сума відстаней не змінюється. Таким чином, суми відстаней від 50-ої та від 51-ої точок до всіх інших рівні.

Відповідь. Не можуть.

3. Знайдіть найбільшу кількість восьмикутників, на яку можна розрізати по лініях сітки квадрат 8 на 8.

Розв'язання:

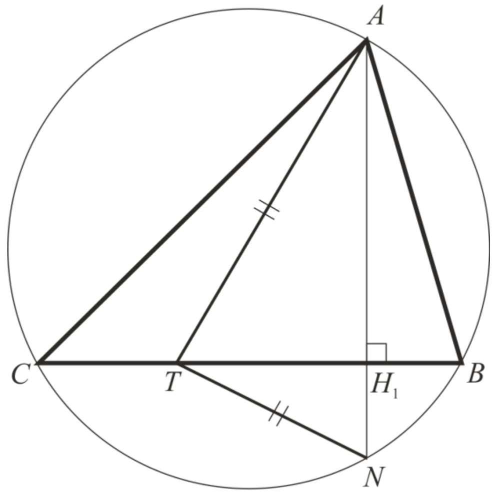
Простим перебором варіантів отримаємо, що наші 8-кутники не можуть складатися з 1, або 2, або 3, а мають містити хоча б 4 одиничні квадратики. Отже, найбільша їх можлива кількість дорівнює 64 : 4 = 16. Покажемо, що цього можна досягти, наприклад так (див. рисунок).



Відповідь. 16

4. Продовження висоти, проведеної з вершини A трикутника ABC, перетинає описане навколо цього трикутника коло в точці N. На стороні BC взято таку точку T, що $AT = TN$.
Знайдіть величину кута A. (*А. Мостовий*)

Розв'язання:



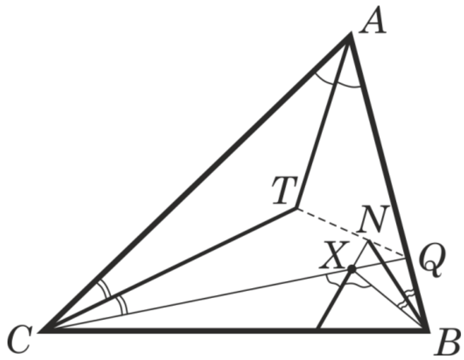
Нехай H1 — основа висоти, проведеної з вершини A. Без обмеження загальності будемо вважати, що точка T не належить висоті трикутника.

У такому випадку $\Delta ATH_1 = \Delta NTH_1$ (за катетом та гіпотенузою). Звідси AH1 = H1N.

Отже, хорда BC описаного кола ділить хорду AN навпіл та перпендикулярна їй. Тобто BC є діаметром. Отже, $\angle A = 90°$.

5. Довільна точка X лежить всередині трикутника ABC. Бісектриси кутів BAC та ACX перетинаються в точці T, а прямі, які містять бісектриси кутів BXC та XBA — у точці N. Нехай Q — точка перетину променя CX зі стороною AB. Доведіть, що точки T, N, Q належать одній прямій. (*О. Карлюченко*)

Розв'язання:



Оскільки AT та CT є бісектрисами трикутника ACQ, то точка T їхнього перетину є інцентром цього трикутника. Тому QT є бісектрисою кута AQC.

Розглянемо далі трикутник BXQ. Для нього BN є бісектрисою внутрішнього кута, а XN виявляється бісектрисою зовнішнього кута, суміжного із внутрішнім кутом QXB. Отже, точка N — центр зовнівписаного кола трикутника BXQ, яке дотикається до сторони XQ. Таким чином, QN має бути бісектрисою зовнішнього кута, суміжного із внутрішнім кутом XQB. Тобто QN — також бісектриса кута AQC.

Отже, точки T, N, Q належать одній прямій.

II тур

6. На чудо-яблуні ростуть червоні, жовті та 2 зелені яблука. У червні половина червоних яблук пожовтіла, у липні половина жовтих яблук стала зеленими, а в серпні – половина зелених яблук стала червоними. Виявилось, що кількість червоних яблук за літо не змінилась. Яка найменша кількість жовтих яблук могла рости на яблуні спочатку?

Розв'язання:

Складемо таблицю за умовою задачі, позначивши x і y невідому початкову кількість червоних та жовтих яблук відповідно.

	червоні	жовті	зелені
було спочатку	x	y	2
стало в кінці червня	$\frac{1}{2}x$	$y+\frac{1}{2}x$	2
стало в кінці липня	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}x$	$2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}x$
стало в кінці серпня	$1+\frac{1}{4}y+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}x$	$1+\frac{1}{4}y+\frac{1}{8}x$

За умовою, маємо рівняння: $1+\frac{1}{4}y+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}x=x$; $\frac{3}{8}x=1+\frac{1}{4}y$; $3x=8+2y$. Звідси, враховуючи, що x і y - цілі числа, маємо, що $8+2y$ - кратне 3. А отже, y дає остачу 2 при діленні на 3. Найменшим таким числом є число 2. Тоді $x=4$.

Відповідь. 2.

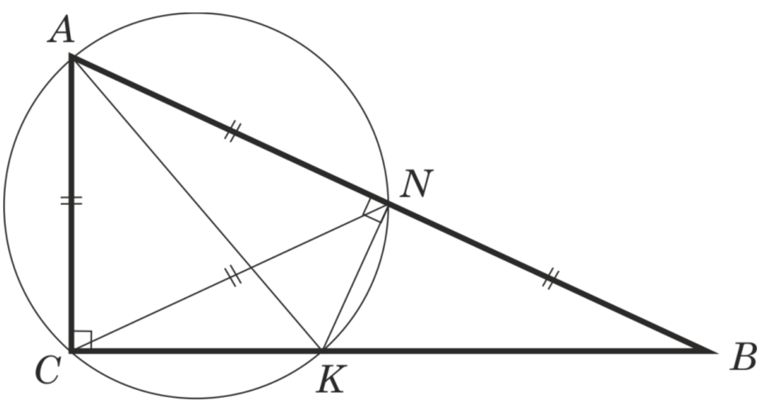
7. Знайдіть значення виразу: $\frac{1\cdot2+2\cdot3+\cdots+2016\cdot2017+2017\cdot2018}{1^2+3^2+\cdots+2017^2}$.

Розв'язання:

Розглянемо чисельник даного дробу та винесемо за дужки спільний множник – число 2. Маємо: $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6+6\cdot7+7\cdot8+\cdots+2016\cdot2017+2017\cdot2018=2(1+3+3\cdot2+2\cdot5+5\cdot3+3\cdot7+7\cdot4+\cdots+1008\cdot2017+2017\cdot1009)=2\big(1+3(1+2)+5(2+3)+7(3+4)+\cdots+2017(1008+1009)\big)=2(1^2+3^2+\cdots+2017^2)$. Скоротимо дріб і отримаємо відповідь.

Відповідь. 2.

8. У прямокутному трикутнику *ABC* кут *A* дорівнює 60°. Точка *N* — середина гіпотенузи *AB*. Радіус кола, описаного навколо трикутника *ANC*, дорівнює *R*. Знайдіть довжину катета *BC*. (*О. Пахомов*)



Розв'язання:

Нехай коло, описане навколо трикутника *ANC*, перетинає відрізок *BC* у точці *K*. У такому разі *AK* є діаметром цього кола, оскільки воно є одночасно й описаним навколо прямокутного трикутника *ACK* (центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить в середині його гіпотенузи). Отже, $AK = 2R$, а $\angle ANK = 90°$ (за тією ж властивістю прямокутного трикутника).

CN є медіаною трикутника ABC, проведеною до гіпотенузи. Звідси $CN = AN = NB$. Трикутник ANC — рівнобедрений з кутом 60°, а отже, рівносторонній. Тому $AN = AC$.

Прямокутні трикутники ACK та ANK рівні за катетом та гіпотенузою. Отже, $\angle CAK = \angle NAK = \frac{1}{2}\angle A = 30°$.

У прямокутному трикутнику ACK CK — катет, який лежить навпроти кута 30°, тому він рівний половині гіпотенузи. Тобто $CK = \frac{1}{2}AK = R$.

Помітимо тепер, що трикутник AKB — рівнобедрений, оскільки у ньому KN є одночасно висотою та медіаною. Отже, $KB = AK = 2R$.

У результаті, $BC = CK + KB = R + 2R = 3R$.

8 клас

1. Відомо, що при будь-якому цілому K ($K \neq 22$) число ($a - K^3$) ділиться без остачі на ($22 - K$). Знайдіть a.

Розв'язання:

Помітимо, що

$$\frac{a-K^3}{22-K} = \frac{a-22^3}{22-K} + \frac{22^3-K^3}{22-K} = \frac{a-22^3}{22-K} + 22^2 + 22K + K^2$$

Тому, число $\frac{a-22^3}{22-K}$ – ціле при будь-якому $K \neq 22$, тобто число $a - 22^3$ ділиться на будь-яке ціле число, відмінне від нуля, а тому, $a = 22^3$.

Відповідь: $a = 22^3$.

2. Сума чотирьох чисел a, b, c, d дорівнює 0. Доведіть, що хоча б одне з чисел $|ab - cd|$, $|ac - bd|$, $|ad - bc|$ не є добутком трьох простих чисел.

Розв'язання:

За умовою $-d = a + b + c$. Тому

$$|ab - cd| = |ab + c(a + b + c)| = |(a + c)(b + c)|.$$

Аналогічно,

$$|ac - bd| = |(a + b)(b + c)|$$

Та

$$|ad - bc| = |bc - ad| = |(a + b)(a + c)|$$

Перемножуючи отримані рівності, знаходимо, що

$$|ab - cd| \times |ac - bd| \times |ad - bc| = ((a + b)(a + c)(b + c))^2.$$

Якщо б кожний зі співмножників у лівій частині останньої рівності був добутком трьох простих чисел, то квадрат у правій частині рівності був би добутком дев'яти простих чисел, що неможливо, бо в квадраті будь-який простий співмножник входить у парній степені.

3. У рядок виписано 23 натуральних числа (не обов'язково різних). Доведіть, що між ними можна так розставити дужки, знаки додавання та множення, щоб значення отриманого виразу ділилося на 2000 без остачі.

Розв'язання:

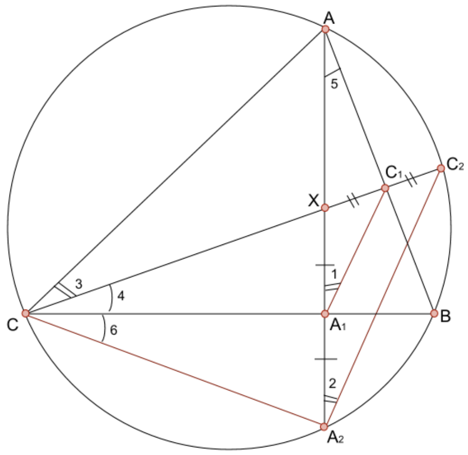
Розіб'ємо дані *23* числа на вісім груп з чисел, що стоять поряд: три групи по п'ять чисел та чотири групи по два числа (в якому порядку ці групи будуть розміщенні — неважливо). Кожну групу заключимо в дужки, а між групами розставимо знаки множення. Якщо розставити знаки в середині кожної групи так, щоб результат операції в групі з двох чисел ділився на *2*, а в групі з п'яти чисел – на *5*, то весь вираз буде ділитися на *24*53=2000*.

Покажемо, що таке розміщення знаків в групах існує. Якщо числа в групі з двох чисел різної парності, то між ними необхідно поставити знак множення, якщо однакової парності – додавання. Результат, очевидно, буде ділитися на *2*. Розглянемо групу з чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, що йдуть саме в такому порядку. Запишемо остачі від ділення на 5 наступних п'яти сум:

$$a_1,\ \ a_1+a_2,\ \ a_1+a_2+a_3,\ \ a_1+a_2+a_3+a_4,\ \ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.$$

Якщо одна з остач дорівнює 0, то відповідна сума ділиться на 5. В цьому випадку необхідно розставити знаки додавання між числами, що входять в цю суму, саму суму (якщо необхідно) заключити в дужки, а всі проміжки між числами, що залишаться заповнити знаками множення. Якщо ж ні одна з остач не дорівнює 0, то згідно принципу Діріхлє, серед них знайдуться дві однакових остачі. Нехай, наприклад, суми $a_1+...+a_i$ и $a_1+...+a_j$ ($i<j$) дають однакові остачі при діленні на 5. Тоді їх різниця, що представляє собою суму підряд стоячих чисел $a_i+1+...+a_j$, ділиться на 5, ми знову розставляємо знаки додавання, заключаємо цю суму в дужки, а позиції, що залишились заповнюємо знаками множення. Таким чином, в будь-якому випадку зможемо розставити знаки в групі з п'яти чисел так, щоб результат ділився на 5.

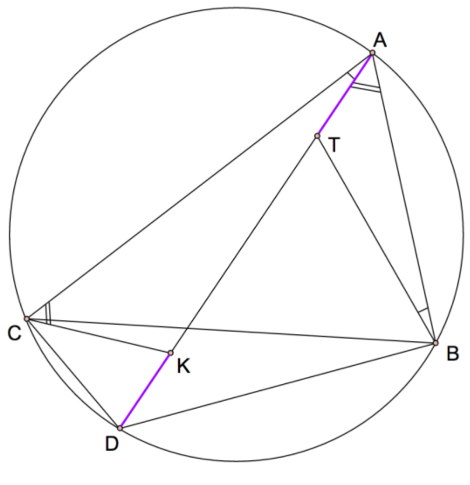
4. Всередині трикутника ABC, вписаного в коло, взято точку X. Промінь AX перетинає сторону BC в точці A_1, а описане коло в точці A_2. Промінь CX перетинає сторону AB в точці C_1, а описане коло – в точці C_2. Відомо, що $XA_1 = A_1A_2$ та $XC_1 = C_1C_2$. Доведіть, що точка X співпадає з ортоцентром трикутника ABC. (*О. Черкаський*)



Розв'язання:

З'єднаємо A_1 з C_1 та A_2 з C_2. У $\Delta\ XA_2C_2$ відрізок A_1C_1 – середня лінія, тому $\angle XA_1C_1 = \angle XA_2C_2$ та рівні половині дуги AC_2. А тому $\angle\ XA_1C_1 = \angle\ XA_2C_2 = \angle ACC_2$. Тому, навколо чотирикутника AC_1A_1C можна описати коло та $\angle C_1CA_1 = \angle C_1AA_1$ і дорівнюють половині дуги A_2B, а тому $\angle C_1CA_1 = \angle C_1AA_1 = \angle BCA_2$. Отримаємо, що в трикутнику CXA_2 медіана CA_1 є і бісектрисою, а тому $CA_1 \perp AA_1$.

5. У трикутнику ABC провели пряму AT таку, що $\angle CAT = \angle ABT$. AT перетинає описане коло трикутника ABC у точці D. На відрізку AD взяли точку K таку, що $\angle BAT = \angle ACK$. Доведіть, що $AT = KD$. (*О. Карлюченко*)



Розв'язання:

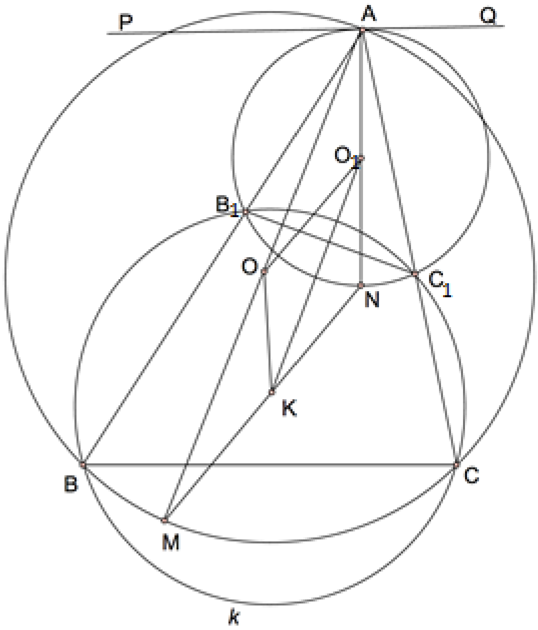
Кут $\angle KTB$ зовнішній для трикутника ΔATB і дорівнює $\angle A$. Кут $\angle CKD$ зовнішній для трикутника CKA і також дорівнює $\angle A$. Тоді трикутники ΔCKD та ΔTDB подібні (за рівністю кутів; також подібні ΔABC).

Запишемо теорему синусів для трикутників ΔCKD та ΔTBD, з якої отримаємо:

$$\frac{DT}{DB} = \frac{b}{a}, \frac{KD}{DC} = \frac{c}{a} \Rightarrow DT + KD = \frac{b \cdot DB + c \cdot DC}{a} =$$
$$= AD \Rightarrow DK = AT$$

6. На площині задано трикутник ABC. Коло з центром у точці K проходить через B і C та перетинає сторони AB і AC у точках B_1 і C_1 відповідно. Нехай M і N – точки, діаметрально

протилежні точці A в колах, описаних навколо трикутників ABC і AB_1C_1 відповідно. Доведіть, що K – середина відрізка MN. (*В. Ясінський*)



Розв'язання:

Нехай O і O_1 – центри кіл, описаних навколо трикутників ΔABC і ΔAB_1C_1 відповідно. Оскільки лінія центрів двох кіл перпендикулярна до їх спільної хорди, то $O_1K \perp B_1C_1$ і $OK \perp BC$.

Проведемо дотичну PQ у точці A до описаного кола трикутника ΔAB_1C_1. Тоді за теоремою про кут між дотичною і хордою та властивостями вписаних кутів, матимемо:

$\angle QAC_1 = \angle AB_1C_1 = \angle C_1CB,$

тобто $\angle QAC = \angle C_1CB$. А ця рівність кутів означає, що $PQ \parallel BC$. Так як PQ – дотична, то $Q_1A \perp PQ$, а з паралельності PQ і BC випливає, що $AO_1 \perp BC$. А так як $OK \perp BC$, то $AO_1 || OK$.

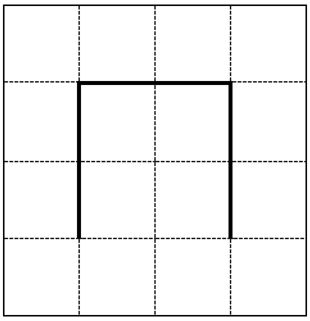
Аналогічно, якщо провести дотичну в точці A до описаного кола трикутника ΔABC, то так само доводиться, що $AO \perp B_1C_1$. А так як $OK \perp B_1C_1$, то $AO || O_1K$.

Таким чином, $AO_1 || OK$, $AO || O\_1\, K$, тобто $AOKO_1$ – паралелограм. Звідси випливає, що його діагоналі AK і OO\` точкою перетину діляться навпіл. Нехай S – їх точка перетину. Тоді при гомотетії з центом в точці A і коефіцієнтом $k = 2$ точки O, S, O_1 відображаються відповідно у точки M, N, K. Оскільки S – середина OO_1, то K – середина MN, що і треба було довести.

9-10 клас (командна)

1. Країна Флатляндія має форму квадрата зі стороною 100 км, у якому розташовано сім великих міст. Уряд Флатляндії виділив бюджет, достатній для побудови 400 км залізничних шляхів. Чи вистачить цього для поєднання усіх міст країни в єдину залізничну мережу? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання:



Розіб'ємо Флатляндію на квадрати 25x25км:
Побудуємо центральний залізничний каркас (на рисунку позначено товстими лініями). Загальна довжина цього каркасу – 150 км.
Зауважимо, що кожне місто може бути під'єднане до каркасу шляхом довжини не більш ніж $25\cdot\sqrt{2}$ км. Таким чином, для побудови залізничної мережі знадобиться загалом $150 + 7\cdot 25\cdot\sqrt{2} \approx 397{,}49$ км.

Відповідь: так, вистачить.

2. Скільки існує способів розбити числа $1, 2, 2^2, \dots, 2^{2017}$ на дві групи A та B таким чином, щоб рівняння $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$, де $S(A)$ та $S(B)$ – суми усіх чисел у відповідних групах, мало цілий корінь?

Розв'язання:

Нехай x_1 та x_2 – цілі корені нашого рівняння, $x_1 \le x_2$. З теореми Вієта маємо:
$$(x_1+1)(x_2+1) = S(A) + S(B) + 1 = 2^{2018},$$
звідки маємо, що корені нашого рівняння мають вид $x_1 = 2^k - 1$, $x_2 = 2^{2018-k} - 1$, де $k \in \{0, 1, 2, \dots, 1009\}$. Таким чином, існує не більш ніж 1010 способів такого розбиття.
Покажемо, що при довільному k можна побудувати відповідне розбиття. Дійсно, число $p = x_1 + x_2 = 2^k + 2^{2018-k} - 2$ однозначно представляється через суму різних степенів двійки (у двійковому записі), і ці степені формують групу A. У той же час число $q = x_1x_2 = (2^k - 1)(2^{2018-k} - 1) = 2^{2018} - p - 1$ є сумою всіх степенів двійки від 1 до 2^{2017} окрім тих, які входять у представлення p, оскільки $2^{2018} - 1$ є сумою всіх таких степенів двійки; отже, ці степені будуть формувати групу B. Тоді x_1 та x_2 є коренями рівняння $x^2 - px + q = x^2 - S(A)x + S(B) = 0$.

Відповідь: існує 1010 способів такого розбиття.

3. Доведіть, що для усіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ та усіх натуральних $n > m$ справедлива нерівність $2|\sin^n(x) - \cos^n(x)| \le 3|\sin^m(x) - \cos^m(x)|$.

Розв'язання:

Зауважимо, що при $x = \frac{\pi}{4}$ твердження задачі очевидне, а випадок $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ зводиться до випадку $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ заміною $y = \frac{\pi}{2} - x$; тому надалі вважаємо, що $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.
Далі зауважимо, що при $m \ge 2$ виконується
$$\cos^m x - \sin^m x = (\cos^m x - \sin^m x)(\cos^m x + \sin^m x) =$$
$$= \cos^{m+2} x - \sin^{m+2} x + \sin^2 x \cos^2 x\,(\cos^{m-2} x - \sin^{m-2} x) \ge \cos^{m+2} x - \sin^{m+2} x$$
Отже, достатньо довести нерівність для випадків $n = m + 1$ та $m = 1, n = 3$; всі інші випадки зводяться до цих двох.
Покажемо, що при $n \ge k > 0$ має місце нерівність

$$\frac{\cos^{n+1}x - \sin^{n+1}x}{\cos^n x - \sin^n x} \le \frac{\cos^{k+1}x - \sin^{k+1}x}{\cos^k x - \sin^k x}.$$

Дійсно, ця нерівність еквівалентна нерівності

$$\cos^k x \sin^k x\,(\cos x - \sin x)\left(\cos^{n-k} x - \sin^{n-k} x\right) \ge 0$$

Таким чином, випадок $n = m + 1$ зводиться до випадку $m = 1, n = 2$.

Отже, маємо:

а) при $m = 1, n = 3$:

$$\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x) \le \frac{3}{2}(\cos x - \sin x),$$

оскільки $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}$.

б) при $m = 1, n = 2$:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) < \frac{3}{2}(\cos x - \sin x),$$

оскільки $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Отже, нерівність доведена для всіх натуральних $n > m$.

4. На нескінченній ігровій мапі з квадратними клітинками деяким чином розташовано 2017 терранських лазерних гармат. Лазерні гармати б'ють у нескінченність по горизонталі, вертикалі або діагоналі. На кожній клітинці мапи, окрім тих, які знаходяться під ударами гармат, розташовано по зергу. На кожному кроці кожен зерг може або залишитись на місці, або переміститись у сусідню клітинку; при цьому два зерги не можуть стояти на одній клітинці, але зерг може стати на клітинку, яку в той час залишає інший зерг. Сарі Керіган вдалось вимкнути всі терранські лазерні гармати. Чи вдасться зергам після цього за скінченну кількість ходів заполонити усю мапу (окрім клітинок, зайнятих власне гарматами)?

Розв'язання:

Розглянемо горизонтальну лінію, на якій не стоїть жодної гармати. На ній не зайнято зергами не більш ніж $3 \cdot 2017$ клітинок. За один крок можна зменшити цю кількість на 2: всі зерги, що стоять праворуч від самої правої порожньої клітинки, набігають вліво, а всі зерги, що стоять ліворуч від самої лівої порожньої клітинки, набігають вправо. Отже, не більш ніж за $1{,}5 \cdot 2017 < 3026$ ходів зерги займуть всі горизонтальні лінії, окрім тих, в яких стоять терранські гармати – їх не більш ніж 2017. Виконуючи аналогічні дії по вертикалям, зерги не більш ніж за $0{,}5 \cdot 2017 < 1010$ кроків займуть й ці клітинки, завершивши своє набігання.

Зауваження.

Не для всіх конфігурацій порожніх клітинок зерги зможуть зайняти все поле за скінченну кількість кроків. Наприклад, якщо терранська авіація прорідила ковровим бомбардуванням поле, звільнивши від зергів всі клітинки, які знаходяться від певної клітинки (початку координат) на відстані, кратній 2017 клітинок по горизонталі чи вертикалі, то зергам знадобиться нескінченна кількість кроків, щоб знову зайняти всю дошку.

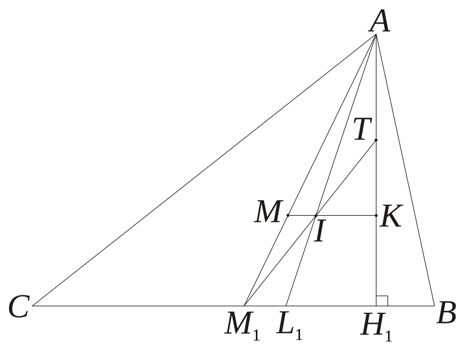
5. У різницевому трикутнику ABC $(b + c = 2a)$ прямі MI та M_1I перетинають висоту AH_1 у точках K і T відповідно. Знайдіть відношення $AT : TK : KH_1$.(О. Карлюченко)

Розв'язання:

За властивістю інцентра ΔABC $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a} = \frac{2}{1}$, тобто $MI \parallel BC$ ($\frac{AM}{MM_1} = \frac{2}{1}$).

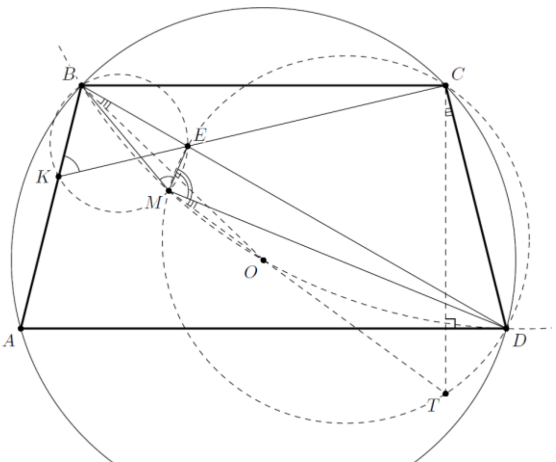
Отже, $KH_1 = r$ (r – радіус вписаного в ΔABC кола).
Відомо, що $M_1 I$ відсікає від висоти AH_1 відрізок рівний r, тобто $AT = r$.

Площа ΔABC дорівнює $\frac{1}{2} AH_1 \cdot a = pr$, звідки $AH_1 = \frac{2pr}{a} = \frac{(a+b+c)r}{a} = \frac{3ar}{a} = 3r$. Таким чином, $TK = AH_1 - AT - KH_1 = 3r - r - r = r$. $TK = r$.Отже, $AT : TK : KH_1 = r : r : r = 1:1:1$.



Відповідь: 1:1:1.

6. Трапецію *ABCD* (*BC* ∥ *AD*) вписано в коло. На діагоналі *BD* довільним чином обрано точку *E*. Пряма *CE* перетинає сторону *AB* в точці *K*. Позначимо описане коло трикутника *CED* через ω. Перпендикуляр, що проведено з точки *C* до *AD* вдруге перетинає ω в точці *N*, а описане коло трикутника *BKE* вдруге перетинає ω в точці *M*. Доведіть, що пряма *TM* проходить через центр описаного кола трапеції *ABCD*, якщо точка *M* належить внутрішній частині трикутника *ABD*. (*Д. Хілько*)



Розв'язання::

Оскільки *ABCD* вписана трапеція, то вона рівнобедрена, а ∠*BAD* = ∠*ADC*. Нехай *O* – центр описаного кола *ABCD*.
Із вписаних кутів маємо: ∠*BKE* = ∠*BME*, ∠*EMD* = *180°* – ∠*ECD*. Враховуючи паралельність, ∠*ECD = 180°* – ∠*BCE* – ∠*CDA*.
Отже, ∠*BMD* = ∠*BME* + ∠*EMD* = ∠*BKE* + *180°* – ∠*ECD* = ∠*BKE* + ∠*BCE* + ∠*CDA* = *180°* – ∠*ABC* + ∠*BAD* = 2∠*BAD* = ∠*BOD*.
Таким чином, точки *O*, *M*, *B*, *D* лежать на одному колі.
Звідси ∠*OMD* = ∠*OBD* = 90° – ∠*BAD* = 90° – ∠*ADC* = ∠*TCD* = ∠*TMD*. Значить ∠OMD = ∠TMD, і точки *M*, *O*, *T* лежать на одній прямій.

7. Дано трикутник ABC. Кола ω_1 та ω_2 проходять через вершину A і дотикаються сторони BC у вершинах B і C відповідно. На дузі BC описаного кола трикутника *ABC* взяли точку F.FB повторно перетинає ω_1 в точці K, а FC повторно перетинає ω_2 в точці T. Доведіть, що ортоцентри трикутників ABC, AKF і AFT лежать на одній прямій. (М. Плотніков)

Розв'язання::

Нехай D_1, D_2, D_3 та H_1, H_2, H_3 – відповідно основи висот, проведених з вершини *A* та ортоцентри трикутників *ABC*, *AKF* і *AFT*. За теоремою Сімсона для точки *A* та трикутника *BFC* маємо: D_1, D_2, D_3 – одна пряма. Кути *AKB* і *ABC* рівні, бо спираються на дугу *AB*. Аналогічно, кути *ATC* і *ACB* теж рівні. Кути *AFC* и *ABC* рівні, оскільки спираються на дугу *AC*. Аналогічно, кути *ACB* і *AFB* теж рівні. Тоді трикутники *ABC*, *AKF* і *AFT* подібні. Використовуючи подібність отримаємо, що $AH_1 : H_1D_1 = AH_2 : H_2D_2 = AH_2 : H_2D_2$. І, оскільки D_1, D_2, D_3 лежать на одній прямій, то H_1, H_2, H_3 – теж лежать на одній прямій.

8. Знайдіть найбільше число q, при якому у площині рівностороннього трикутника існує така точка X, що $AX : BX : CX = 1 : q : q^2$. (В. Брайман)

Розв'язання:

Оскільки за нерівністю Птолемея $AX \cdot BC + BX \cdot AC \geq CX \cdot AB$, то $AX + BX \geq CX$, тобто $q^2 \leq q + 1$. Звідси $q \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Залишається показати, що при $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ шукана точка X існує. На дузі AB кола, описаного навколо трикутника ABC, відмітимо точку X, для якої $BX = qAX$ (з міркувань неперервності така точка існує, адже $BX > qAX$, якщо точка X достатньо близько до A, та $BX < qAX$, якщо точка X достатньо близько до B). Для цієї точки у нерівності Птолемея досягається рівність, тому:
$CX = AX + BX = (1 + q)AX = q^2AX.$

Відповідь: $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.