

6 клас

I тур

1. Після того, як Наталка з'їла половину персиків із банки, рівень компоту знизився на одну третину. На яку частину (від отриманого рівня) знизиться рівень компоту, якщо з'їсти половину решти персиків?

Розв'язок:

Оскільки половина персиків становить одну третину від усього компоту, то половина від решти персиків становить одну шосту частину від всього компоту. Враховуємо, що $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, отримуємо, що $\frac{1}{6}$ становить $\frac{1}{4}$ від $\frac{4}{6}$.

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

2. У ряду є 2016 квадратиків розміром 2×2 см, які розфарбовані відповідно до зразка на малюнку:



Чому дорівнює площа всіх зафарбованих частин цих квадратиків?

Розв'язок:

Площа зафарбованих частин перших шести квадратів дорівнює 6 см^2 . Далі квадрати повторюються. Кількість наборів по 6 квадратів дорівнює $2016 : 6 = 336$. Тобто, площа всіх зафарбованих частин дорівнює $6 \cdot 336 = 2016 \text{ см}^2$.

Відповідь: 2016 см^2 .

3. Коля і Толя вийшли з села Квітневе до села Травневе, причому кожен рухався з деякою постійною швидкістю. Коли Коля подолав третину всього шляху, Толя пройшов лише чверть. Коли ж Толі залишалося пройти чверть усієї відстані, Коля мав пройти ще третину. Хто з хлопців йшов швидше і в скільки разів? Хто з них раніше вийшов і хто раніше прийде в село Травневе?

Розв'язок:

Через T_1 позначимо той момент часу, коли Коля пройшов третину, а Толя – чверть всього шляху. А через T_2 – той момент часу, коли Колі залишалося пройти третину, а Толі – чверть всього шляху. Отже, за час між моментами T_1 і T_2 , Коля пройшов $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ всього шляху, а Толя пройшов $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ всього шляху. Тому Толя рухався в $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 1,5$ рази швидше, що означає, що він прийшов раніше, а вийшов пізніше, ніж Коля.

Відповідь: Толя рухався в 1,5 рази швидше, прийшов раніше і вийшов пізніше, ніж Коля.

4. Дано чотири цілих числа a, b, c, d . Дозволяється вибрати три з них і запитати: їх сума парна чи непарна? Як за три таких питання дізнатися парність числа a ?

Розв'язок:

Запитаємо, яка парність у чисел $a + b + c$, $a + b + d$ та $a + c + d$. Тоді ми дізнаємося парність їх суми: $3a + 2b + 2c + 2d$. Вона має таку ж парність, як і число a , оскільки відрізняється від нього на парне число $2(a + b + c + d)$.

5. Карлсон щомісяця записував свою вагу. Чи можливо таке, що за будь-які 5 місяців поспіль його загальна вага зменшувалася, а в цілому за рік збільшилася?

Розв'язок:

Можливо! Наприклад, його вага могла бути такою: у січні – 100 кг, лютому – 200 кг, березні – 300 кг, квітні – 400 кг, травні – 500 кг, червні – 99 кг, липні – 199 кг, серпні – 299 кг, вересні – 399 кг, жовтні – 499 кг, листопаді – 98 кг, грудні – 198 кг.

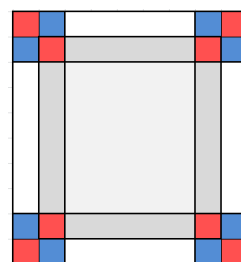
II тур

6. Юрко вирішив написати картину. Для цього на папері в клітинку по лініях сітки він намалював прямокутник. Потім він накреслив навколо нього рамку, шириною в одну клітинку (див. малюнок). Виявилося, що площа рамки дорівнює площі прямокутника. Які розміри могла мати картина Юрка? (Розгляньте всі можливі варіанти.)



Розв'язок:

Очевидно, що ширина малюнка більше однієї клітини. Намалюємо всередині рамки ще одну рамку шириною в одну клітинку. Тоді в маленькій рамці, як і у великій, буде 4 кутові клітинки (червоні), а кожна сторона буде на дві клітинки коротше. Тоді в маленькій рамці буде на 8 клітинок менше, ніж у великій (вони пофарбовані синім). Тобто з 8 клітинок повинен скластися прямокутник всередині маленької рамки, він може мати розміри 1×8 або 2×4 .



Відповідь: 3×10 або 4×6 .

7. Дано чотири числа: 8; 8; 3; 3. Як, використовуючи всі ці числа, дужки та знаки арифметичних дій (+, −, :, ·), отримати число 24?

Розв'язок: $8 / (3 - 8/3)$.

8. У Фараона на дверях скарбниці встановлено кодовий замок. Він відмикається, якщо набрати певне трицифрове число, кратне 7. Відомо, що сума цифр коду є двоцифровим числом, яке можна отримати також, відкинувши останню цифру кодового числа. Знайдіть число, яке відчиняє двері скарбниці.

Розв'язок:

Якщо ми маємо число $\overline{abc}$ і знаємо, що сума його цифр є двоцифровим числом, яке можна отримати також, закривши останню цифру кодового числа, то $a + b + c = \overline{ab}$. Тобто, $a + b + c = 10a + b$, а $c = 9a$. Так як a та c цифри, то $a = 1$, $c = 9$. Оскільки з усіх подібних чисел кодове число – ділиться на 7, то, перебравши всі варіанти, отримаємо $b = 1$ або 8.

Відповідь: 119, 189.

1. Цілі числа a, b, c, d задовольняють співвідношення: $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$. Чи може їх добуток дорівнювати 2016?

Розв'язок:

За основною властивістю пропорції $(a-b)(c+d) = (a+b)(c-d)$. Розкриваючи в цій рівності дужки та зводячи подібні доданки, отримаємо, що $bc = ad$. Тоді добуток цих чисел $abcd = (bc)^2$, тобто є квадратом цілого числа. А число $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ не є квадратом жодного цілого числа.

Відповідь: не може.

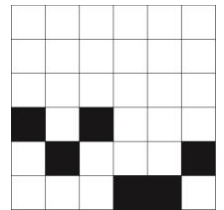
2. На гранях кубика розставлено числа від 1 до 6. Кубик підкинули двічі. Першого разу сума чисел на бічних гранях виявилася рівною 12, а другого разу – 15. Яке число написано на грані, протилежній до тієї, де написано число 3?

Розв'язок:

Сума всіх чисел на кубику дорівнює 21. Після першого підкидання сума чисел на верхній та нижній гранях дорівнювала $21 - 12 = 9$. А після другого підкидання $21 - 15 = 6$. Отримати 9 можна двома способами $9 = 4 + 5$ або $9 = 3 + 6$. Число 6 можна отримати теж двома способами $6 = 5 + 1$ або $6 = 4 + 2$. Якщо $9 = 4 + 5$ (тобто числа 4 та 5 знаходяться на протилежних гранях), то 6 після другого підкидання отримати неможливо. Тоді $9 = 3 + 6$, тобто числа 3 та 6 знаходяться на протилежних гранях.

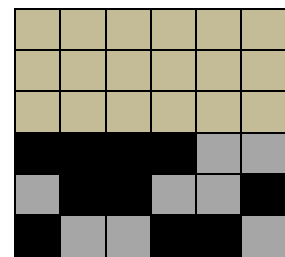
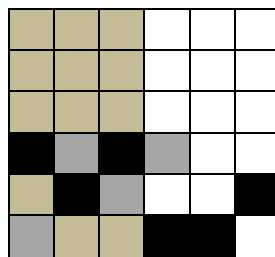
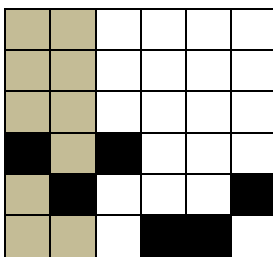
Відповідь: 6.

3. У квадраті 6×6 деякі клітинки зафарбовані свіжою фарбою так, як показано на малюнку. Якщо перегнути квадрат по будь-якій лінії сітки, а потім розігнути назад, то клітинки, які при перегинанні співпадали із зафарбованими, теж зафарбуються. Яку найменшу кількість згинань доведеться зробити, щоб зафарбувати всі клітинки?



Розв'язок:

Двох згинань явно недостатньо. Після кожного згинання кількість зафарбованих клітинок не перевищує подвоєної кількості клітинок, зафарбованих до початку згинання. Оскільки спочатку було зафарбовано 6 клітинок, то після двох згинань зафарбованих клітинок стане максимум $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 < 36$. А за три згинання це можна зробити, наприклад, за схемою:



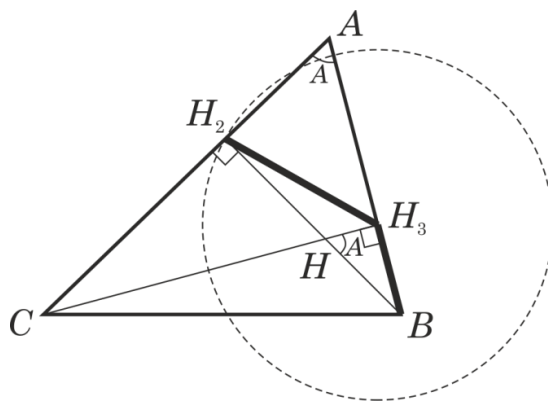
Відповідь: 3.

4. Відновіть гострокутний трикутник ABC за кутом A та відрізками H_2H_3 і BH_3 , де точки H_2 та H_3 — основи висот трикутника, які проведені з вершин B та C відповідно. (В. Павлюк)

Розв'язок:

Нехай висоти BH_2 та CH_3 трикутника ABC перетинаються у точці H . З прямокутного трикутника ABH_2 : $\angle ABH_2 = 90^\circ - \angle A$. Тоді у прямокутному трикутнику BHH_3 : $\angle BHH_3 = 90^\circ - \angle H_3BH = 90^\circ - (90^\circ - \angle A) = \angle A$.

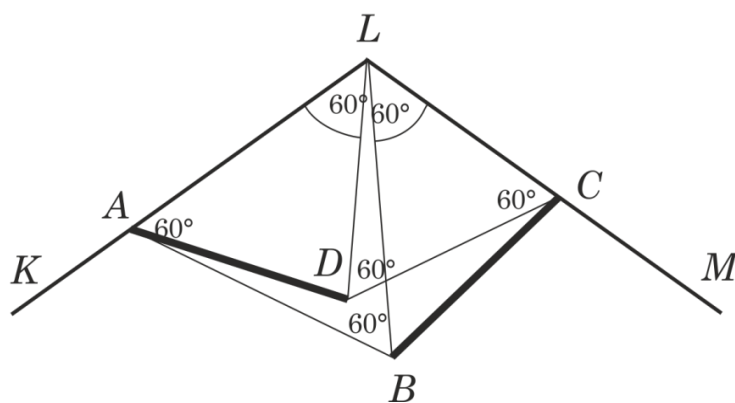
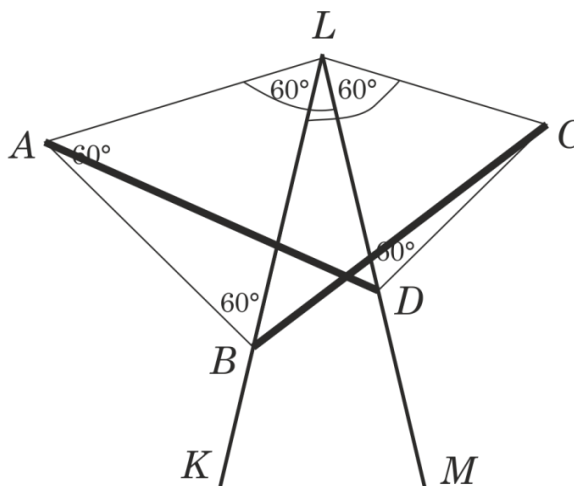
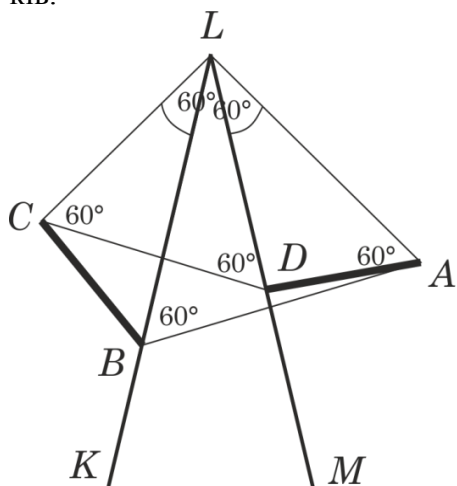
Отже, прямокутний трикутник BHH_3 можна побудувати за катетом BH_3 та гострим кутом BHH_3 . Коло з центром H_3 відомого радіуса H_2H_3 перетне продовження гіпотенузи BH в точці H_2 . Перпендикуляр до BH_2 у точці H_2 перетне продовження BH_3 у точці A , а продовження H_3H — у точці C .



5. На сторонах кута KLM побудовано рівносторонні трикутники LAB та LCD таким чином, що промені LB та LD лежать всередині кута ALC . Доведіть, що $AD = BC$. (М. Плотніков).

Розв'язок:

Помітимо, що трикутники ALD та BLC рівні за двома сторонами та кутом між ними. А отже, $AD = BC$. На рисунку зображено різні можливі варіанти розташування рівносторонніх трикутників.



II тур

6. Петрик виписав підряд усі числа деякого місяця: 123456789101112... та зафарбував три числа (дні народження своїх друзів), жодні два з яких не йдуть підряд. Виявилось, що всі незафарбовані ділянки містять однакову кількість цифр. Доведіть, що один із друзів Петрика народився 1-го числа.

Розв'язок:

Припустимо, що 1-е число не зафарбоване. В даному ряді маємо три зафарбовані числа (позначені x) та три або чотири незафарбовані ділянки: $(\text{---})x(\text{---})x(\text{---})x(\text{---})$.

Якщо найменше із зафарбованих чисел – двозначне, то перша незафарбована ділянка містить непарну кількість цифр, а решта – парну, що неможливо.

Значить найменше із зафарбованих чисел – однозначне. Тоді перша незафарбована ділянка містить максимум 8 цифр, таких ділянок максимум 4 ($4 \cdot 8 = 32$ цифри), а зафарбовано 5 цифр. Тобто кількість цифр у даному ряді не перевищує $32 + 5 = 37$ цифр. Але, розглянувши навіть найкоротший місяць – лютий (28 днів), маємо $9 + 2 \cdot 19 = 47$ цифр (> 37).

Отримана суперечність доводить твердження.

7. У клітинках таблиці розміром 3×3 стоять числа. Сума чисел кожної горизонталі, кожної вертикалі та кожної діагоналі дорівнює нулю. Відомо, що сума квадратів чисел верхнього рядка дорівнює 2016. Знайдіть суму квадратів чисел нижнього рядка.

Розв'язок:

Позначимо числа у таблиці (див рисунок).

За умовою задачі маємо рівності: $a + n + z = 0$; $c + n + x = 0$; $b + n + y = 0$.

Додаючи ліві та праві частини цих рівностей та, використовуючи рівності $a + b + c = 0$ та $x + y + z = 0$, отримаємо, що число в центрі таблиці $n = 0$.

Тоді $a = -z$, $b = -y$, $c = -x$.

Отже, $x^2 + y^2 + z^2 = (-c)^2 + (-b)^2 + (-a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 2016$.

Відповідь: 2016.

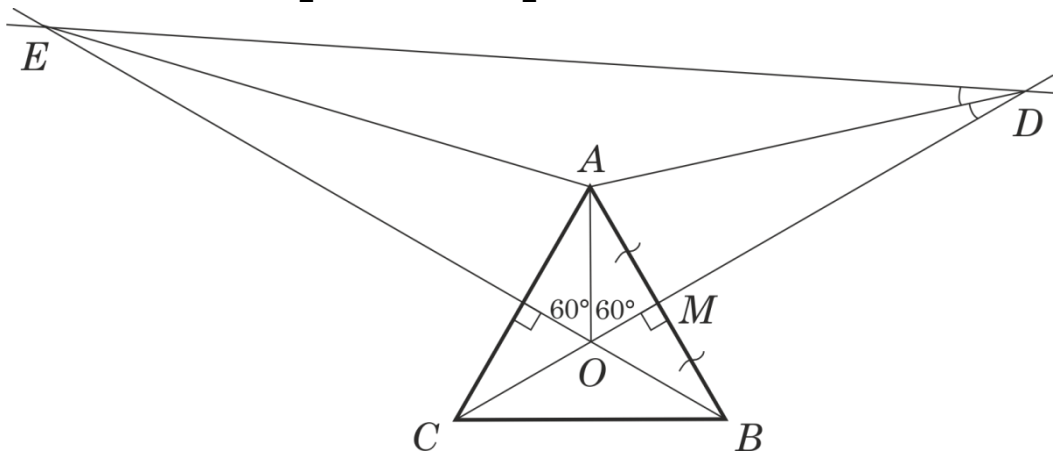
a	b	c
	n	
x	y	z

8. У рівносторонньому трикутнику ABC точка M — середина сторони AB . На промені CM вибрано точку D таку, що $CD > 2CM$. На продовженні висоти, проведеної до сторони AC трикутника ABC взято точку E так, що $\angle ADC = \angle ADE$. Знайдіть величину кута DAE . (Д. Єршов)

Розв'язок:

Нехай O — центр рівностороннього трикутника ABC . Помітимо, що OA — бісектриса трикутника EOD ($\angle EOA = \angle DOA = 60^\circ$), а отже A — інцентр (точка перетину бісектрис) трикутника EOD .

Отже, $\angle DAE = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle EOD = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 150^\circ$.



1. Знайдіть многочлен стандартного вигляду з цілими коефіцієнтами, коренем якого є число $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Розв'язок:

Візьмемо дану рівність $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ та піднесемо до квадрату її ліву та праву частини:
 $x^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$; $x^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$.

Знову піднесемо до квадрату ліву та праву частини:

$$(x^2 - 5)^2 = (2\sqrt{6})^2; x^4 - 10x^2 + 25 = 24; x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Відповідь: $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

2. Для чисел x, y, z , окрім звичайних арифметичних дій та їх властивостей, застосовується дія $\odot$ за наступними правилами: 1) $x \odot x = 0$; 2) $x \odot (y \odot z) = (x \odot z) - y$.
 Обчисліть: $2015 \odot 2016$.

Розв'язок:

Візьмемо рівність $x \odot 0$ та застосуємо до 0 перше правило:

$$x \odot 0 = x \odot (z \odot z) = (x \odot z) - z$$

Тепер візьмемо ту ж початкову рівність, та запишемо її наступним чином:

$$x \odot 0 = x \odot (x \odot x) = (x \odot x) - x = 0 - x = -x.$$

В результаті отримали

$$(x \odot z) - z = -x$$

Тобто

$$(x \odot z) = z - x$$

Перевіримо, чи дійсно підходить дана операція до вказаних правил. Розпишемо перше правило, згідно знайденої операції:

$$x \odot x = x - x = 0$$

У другому правилі розпишемо ліву та праву частини, та переконаємося, що вони рівні:

$$x \odot (y \odot z) = (y \odot z) - x = (z - y) - x = z - y - x;$$

$$(x \odot z) - y = (z - x) - y = z - x - y.$$

Тепер можна знайти значення шуканого виразу

$$2015 \odot 2016 = 2016 - 2015 = 1.$$

Відповідь: 1.

3. 2016 карток із числами від 0 до 2015 розклали в довільному порядку по коробках із номерами від 0 до 2015 так, що в кожную коробку потрапило рівно одне число. Після цього від кожного числа віднімають номер коробки, у якій воно знаходиться. Причому, якщо в результаті отримують від'ємне число, то до нього додають 2016. Чи можна в результаті описаних дій отримати такий же набір чисел, як і на початку (можливо, в іншому порядку)?

Розв'язок:

Позначимо початковий набір чисел на картках $a_0, a_1, \dots, a_{2015}$. Тоді їх сума дорівнює:

$$A = a_0 + a_1 + \dots + a_{2015} = 0 + 1 + \dots + 2015 = \frac{2015 \cdot 2016}{2} = 2015 \cdot 1008.$$

В результаті виконання дій, описаних в умові задачі, отримаємо інший набір із 2016 чисел.

Їх сума буде дорівнювати: $B = a_0 + a_1 + \dots + a_{2015} - 0 - 1 - \dots - 2015 + 2016k = 2016k$, де k – деяке ціле число.

Число B ділиться на 2016, а число A на 2016 не ділиться. Тому B не може бути сумою таких же чисел, як і A .

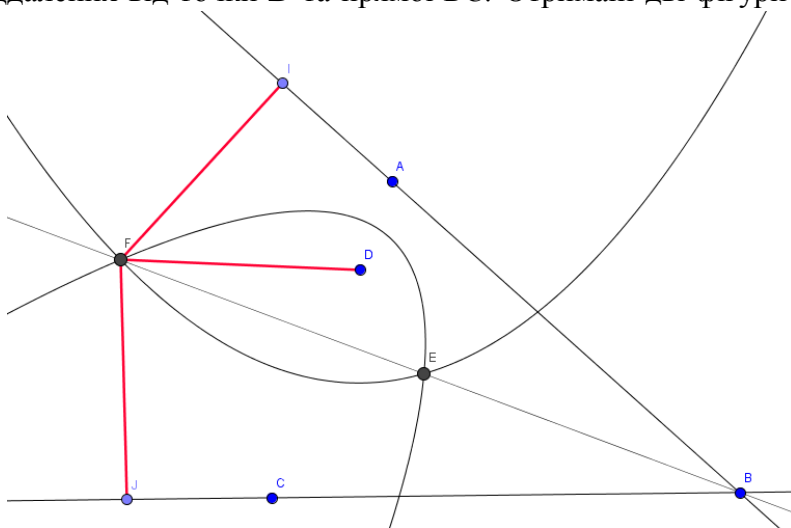
Відповідь: Ні, не можна.

4. Назвемо «русанкулем» прилад, який буде геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки та даної прямої. Побудуйте бісектрису заданого кута ABC із недоступною вершиною за допомогою «русанкуля» та лінійки. (Т. Тимошкевич)

Розв'язок:

Виберемо довільну точку D всередині даного кута ABC . Для цієї точки побудуємо за допомогою інструмента «русанкуля» геометричне місце точок рівновіддалених від точки D та прямої AB , а також геометричне місце точок рівновіддалених від точки D та прямої BC . Отримані дві фігури перетинаються в двох точках E та F .

Проведемо з точки F два перпендикуляри на кожну із сторін кута. Позначимо їх основи за I та J як позначено на рисунку. За означенням «русанкуля» відрізки FI та FD рівні. А також рівними будуть відрізки FJ та FD . Значить точка F рівновіддалена від сторін кута, тобто за властивістю бісектриси належить їй. Аналогічне доведення для точки E . Тобто пряма EF співпадає із бісектрисою.

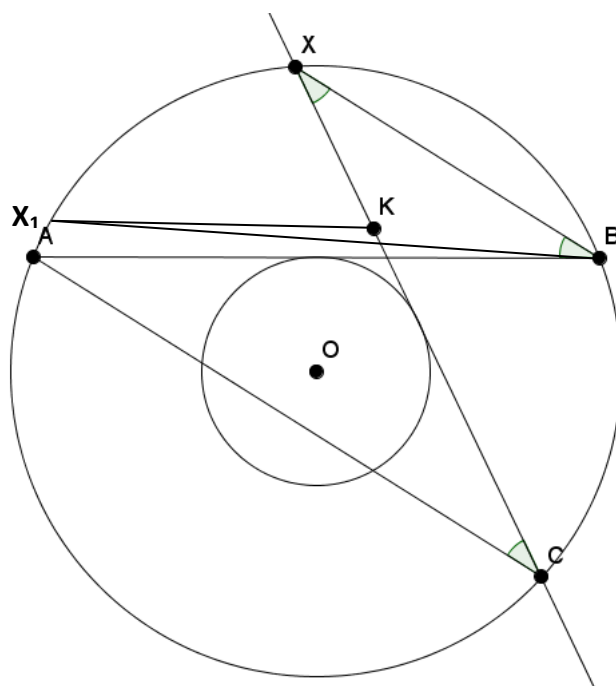


5. Усередині даного кола обрано точку K , яка не належить даній хорді AB . Побудуйте на заданому колі таку точку X , що $\angle KXB = \angle XBA$. (Є. Діомідов.)

Розв'язок:

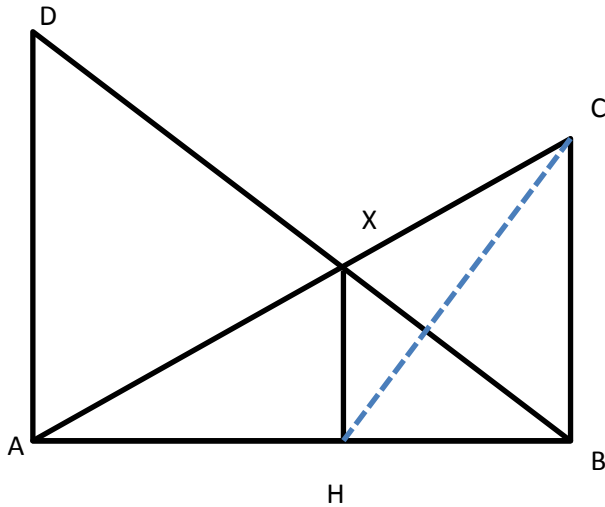
Аналіз. Якщо $KX_1 \parallel AB$, то побудова очевидна. Розглянемо випадок коли $KX \nparallel AB$.

Нехай точка X знайдена. $\angle XCA = \angle XBA$, $\angle XAB = \angle XCB$ бо опираються на одну дугу. Але $\angle KXB = \angle XBA$, то кут $\angle XCA = \angle CXB$. Тобто чотирикутник $XABC$ – рівнобічна трапеція з рівними діагоналями. Тобто $XC = AB$. А як відомо рівні хорди рівновіддалені від центра. Побудова. Будуємо коло з центром O та яке дотикається до хорди AB . Проводимо із точки K дотичну до даного кола. Де ця дотична перетне коло – там і будуть шукані точки X . Дотичних може бути дві, одна або жодної.



6. Дві гіпотенузи DB та CA прямокутних трикутників DAB і CBA перетинаються в точці X . З точки X опустили перпендикуляр на AB і отримали точку H . Доведіть, що CH – бісектриса кута ACB , якщо $AD = AC$. (О. Карлюченко)

Розв'язок:



Із подібності трикутників XHB та DAB маємо $\frac{XH}{DA} = \frac{BH}{BA}$. З іншої сторони, із подібності трикутників AHX та ACB маємо $\frac{XH}{CB} = \frac{AH}{AB}$, або $XH = \frac{AH \cdot CB}{AB}$.

Підставимо цей вираз у перше рівняння та отримаємо: $\frac{AH \cdot CB}{AB \cdot DA} = \frac{BH}{BA}$

Звідки AB скорочується та за умовою, що $AD = AC$, отримуємо: $\frac{AH \cdot CB}{CA} = \frac{BH}{1}$, або можна переписати $\frac{AH}{BH} = \frac{CA}{CB}$, що означає, що CH – бісектриса кута ACB .

9-10 клас (командна)

1. Клавіатура кодового замка містить 33 клавіші, кожній з яких приписане деяке ціле число (не обов'язково всі числа різні). Замок відчиняється, якщо сума чисел на одночасно натиснутих клавішах ділиться на 33.
 - а) Доведіть, що які б не були числа, приписані до клавіш, завжди існує комбінація, яка відчиняє замок.
 - б) Чи вистачить зловмиснику 10 годин для того, щоб знайти таку комбінацію, якщо перевірка однієї комбінації займає одну хвилину? (С. Яковлев)

Розв'язок:

- а) Нехай $x_1, x_2, \dots, x_{33}$ – числа, які приписані до клавіш із відповідними номерами. Розглянемо суми $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_{33}$ (всього таких сум буде 33). Тоді маємо два варіанти: або серед цих сум знайдеться така, що ділиться на 33, і тоді відповідна комбінація клавіш відчинить замок; або такої суми не знайдеться, але тоді за принципом Діріхле знайдуться щонайменше дві суми, які дають однакові остачі від ділення на 33. Нехай це будуть суми $x_1 + x_2 + \dots + x_i$ та $x_1 + x_2 + \dots + x_j$ ($i < j$); тоді їх різниця $x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_j$ буде ділитись на 33, а відповідна послідовність клавіш – відчиняти замок.
- б) Як впливає з пункту а), існує набір послідовних клавіш, який відчиняє замок. Тому зловмиснику треба перебрати всі варіанти натискання послідовних клавіш. Існує 33 послідовності, які починаються з першої клавіші, 32 послідовності, які починаються з другої клавіші і т.д.; загалом маємо $33 + 32 + \dots + 1 = 33 \cdot 17 = 561$ послідовність. Таким чином, зловмиснику знадобиться не більш ніж $561 \text{ хвилина} = 9,35 \text{ години}$ для того, щоб знайти ключову комбінацію.

2. У деякій невід'ємній арифметичній прогресії знайшлося сорок послідовних елементів, які є простими числами. Доведіть, що різниця цієї прогресії більше, ніж 2^{40} .

Розв'язок:

Нехай d – різниця цієї прогресії. З умови задачі випливає, що в даній арифметичній прогресії існує два послідовних простих непарних числа, звідки маємо, що d – парне число.

Також бачимо, що в даній прогресії є три послідовних простих числа, жодне з яких не дорівнює 3, а тому серед них є два, які дають однакову остачу при діленні на 3; звідси випливає, що d ділиться на три.

Аналогічним чином можна показати, що d ділиться на 5, 7, 11, 13, 17 та 19. Отже, d ділиться на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 9\,699\,690$ і не може бути меншим за це число. Звідси маємо, що прості числа 23, 29, 31 та 37 можуть з'явитись в даній прогресії лише як перший елемент. Отже, в найгіршому випадку в нас ще буде 39 послідовних елементів – простих чисел, які не дорівнюють 23, 29, 31 або 37. Міркуваннями, аналогічними попереднім, встановлюємо, що d повинна ділитись ще на 23, 29, 31 та 37.

Таким чином, різниця даної арифметичної прогресії ділиться на всі прості числа від 2 до 37, тобто на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 = 7\,420\,738\,134\,810$ і, відповідно, більше, ніж це число. З іншого боку, $2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$, що, відповідно, менше за $7\,420\,738\,134\,810$. Звідси маємо твердження задачі.

3. Доведіть, що для довільних трьох послідовностей невід'ємних чисел (a_i) , (b_i) , (c_i) , $i=1,2,\dots,n$ справедлива нерівність:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i \right)^3 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^3 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^3 \right) \left(\sum_{i=1}^n c_i^3 \right).$$

За яких умов буде виконуватись рівність? (С. Парк, С.Х. Сань, С. Лі, Й. Лім)

Розв'язок:

Доведемо дану нерівність методом математичної індукції за довжиною послідовностей.

При $n=1$ твердження є очевидним. Нехай воно є справедливим для деякого натурального числа $n-1$; покажемо, що воно буде справедливим і для n .

Позначимо $T = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i c_i$, $A = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^3$, $B = \sum_{i=1}^{n-1} b_i^3$, $C = \sum_{i=1}^{n-1} c_i^3$; тоді припущення індукції формулюється

як $T^3 \leq ABC$ і треба довести, що для довільних невід'ємних a_n, b_n, c_n справедлива нерівність $(T + a_n b_n c_n)^3 \leq (A + a_n^3)(B + b_n^3)(C + c_n^3)$. Розкриємо дужки та розіб'ємо дану нерівність на систему піднерівностей:

- (1) $T^3 \leq ABC$;
- (2) $3T^2 \cdot a_n b_n c_n \leq ABc_n^3 + ACb_n^3 + BCa_n^3$;
- (3) $3T \cdot a_n^2 b_n^2 c_n^2 \leq Ab_n^3 c_n^3 + Ba_n^3 c_n^3 + Ca_n^3 b_n^3$;
- (4) $(a_n b_n c_n)^3 \leq a_n^3 b_n^3 c_n^3$.

Четверта нерівність є очевидною, перша виконується за припущенням індукції. Доведемо другу та третю нерівності.

Розглянемо нерівність (3). Маємо:

$$Ab_n^3 c_n^3 + Ba_n^3 c_n^3 + Ca_n^3 b_n^3 = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^3 b_n^3 c_n^3 + a_n^3 b_i^3 c_n^3 + a_n^3 b_n^3 c_i^3) \geq \sum_{i=1}^{n-1} 3\sqrt{a_i^3 b_i^3 c_i^3 a_n^6 b_n^6 c_n^6} = 3T \cdot a_n^2 b_n^2 c_n^2,$$

де ми використали нерівність Коші для трьох. Отже, нерівність (3) доведено.

Нерівність (2) доводиться аналогічно. Розпишемо ліву та праву частини цієї нерівності:

$$3T^2 \cdot a_n b_n c_n = 3 \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 b_i^2 c_i^2 a_n b_n c_n + 6 \sum_{i \neq j} a_i b_i c_i a_j b_j c_j a_n b_n c_n,$$

$$ABc_n^3 + ACb_n^3 + BCa_n^3 = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^3 b_i^3 c_n^3 + a_i^3 b_n^3 c_i^3 + a_n^3 b_i^3 c_i^3) + \sum_{i \neq j} (a_i^3 b_j^3 c_n^3 + a_j^3 b_i^3 c_n^3 + a_i^3 b_n^3 c_j^3 + a_j^3 b_n^3 c_i^3 + a_n^3 b_i^3 c_j^3 + a_n^3 b_j^3 c_i^3)$$

Послідовно застосовуючи нерівність Коші для трьох, одержимо:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^3 b_i^3 c_n^3 + a_i^3 b_n^3 c_i^3 + a_n^3 b_i^3 c_i^3) &\geq 3 \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 b_i^2 c_i^2 a_n b_n c_n, \\ \sum_{i \neq j} (a_i^3 b_j^3 c_n^3 + a_j^3 b_n^3 c_i^3 + a_n^3 b_i^3 c_j^3) &\geq 3 \sum_{i \neq j} a_i b_i c_i a_j b_j c_j a_n b_n c_n, \\ \sum_{i \neq j} (a_j^3 b_i^3 c_n^3 + a_i^3 b_n^3 c_j^3 + a_n^3 b_j^3 c_i^3) &\geq 3 \sum_{i \neq j} a_i b_i c_i a_j b_j c_j a_n b_n c_n, \end{aligned}$$

звідки випливає нерівність (2). Додаючи нерівності (1)-(4) одна до одної, одержимо твердження індукції.

Рівність у наведеній нерівності буде виконуватись тоді та лише тоді, коли виконується рівність у всіх нерівностях Коші на всіх кроках індукції. Неважко помітити, що це буде справедливим лише

за умови, що для довільних індексів i, j виконується $\frac{a_i}{a_j} = \frac{b_i}{b_j} = \frac{c_i}{c_j}$, тобто послідовності (a_i) , (b_i) ,

(c_i) є одночасно пропорційними одна одній.

Зауваження. Дана нерівність є узагальненням відомої нерівності Коші-Буняковського та, в свою чергу, узагальнюється до наступного твердження (*узагальненої нерівності Коші-Буняковського*). Нехай $(x_i^{(1)}), (x_i^{(2)}), \dots, (x_i^{(T)})$ – довільні послідовності дійсних чисел. Тоді справедлива нерівність:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^{(1)} x_i^{(2)} \dots x_i^{(T)} \right)^T \leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i^{(1)})^T \right) \left(\sum_{i=1}^n (x_i^{(2)})^T \right) \dots \left(\sum_{i=1}^n (x_i^{(T)})^T \right).$$

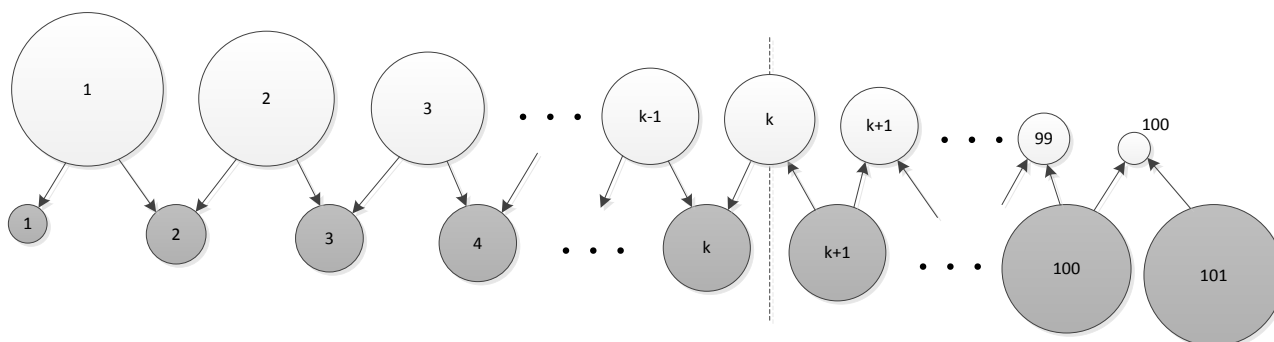
Відоме доведення узагальненої нерівності Коші-Буняковського побудовано на нерівності Гельдера, яке виходить за межі шкільної програми. Але, можливо, ви знайдете більш просте доведення?

- На першій полиці стоїть 100 фарфорових слоненят, які розташовані за спаданням ваги, а на другій полиці – ще 101 фарфорове слонення, які розташовані за зростанням ваги. Відомо, що ваги всіх слоненят попарно різні. За яку мінімальну кількість зважувань можна знайти середнє за вагою слонення, якщо дозволяються лише попарні зважування двох слоненят між собою?

Розв'язок:

Пронумеруємо слоненят на першій полиці числами від 1 до 100 (у порядку спадання ваги), а слоненят на другій полиці – числами від 1 до 101 (у порядку зростання ваги). Будемо називати *нижніми сусідами* для верхнього слонення з номером k нижніх слоненят із номерами k та $k+1$, а *верхніми сусідами* для нижнього слонення з номером k – верхніх слоненят із номерами $k-1$ та k .

Порівнюємо кожне слонення із його сусідами на іншій полиці та поставимо стрілку у бік легшого слоненяти:



Тоді неважко показати, що існує лише одне *обране* слонення, яке буде легшим за одного свого сусіда та важчим за іншого. Дійсно, якщо, наприклад, верхнє слонення важче за свого лівого нижнього сусіда, то воно буде важчим за усіх нижніх слоненят ліворуч, а верхні слоненята ліворуч будуть важчими за нього та, відповідно, за всіх своїх нижніх сусідів. Так само доводиться, що всі верхні слоненята праворуч будуть легшими за всіх нижніх слоненят праворуч. Аналогічно розглядається випадок, коли *обране* слонення є знизу.

Покажемо, що *обране* слонення є середнім за вагою з-поміж усіх слоненят. Розглянемо випадок, коли *обране* слонення – це верхнє слонення із номером k (випадок, коли *обране* слонення є нижнім, розглядається аналогічно). Тоді *обране* слонення буде легшим за всіх верхніх слоненят ліворуч від себе (їх буде $k-1$) та всіх слоненят праворуч від правого нижнього сусіда включно (їх буде $101-k$) – тобто, *обране* слонення буде загалом менше сотні інших слоненят. З іншого боку, *обране* слонення буде більшим за всіх верхніх слоненят праворуч від себе (їх буде $100-k$) та всіх нижніх слоненят ліворуч від лівого нижнього сусіда включно (їх буде k) – тобто, знов-таки, *обране*

слонення буде загалом більше за сотню інших слоненят. Таким чином, *обране* слонення є рівно середнім за вагою.

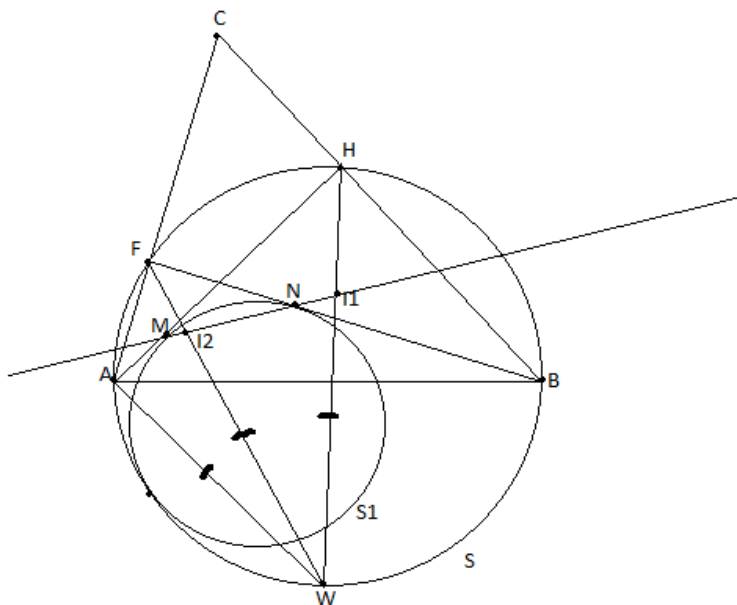
Пошук *обраного* слонення можна виконати так званим *бінарним пошуком*. Спочатку розглянемо нижнє слонення номер 51 та порівняймо його з обома верхніми сусідами. Якщо воно середнє між своїми сусідами, то це й є *обране* слонення; якщо воно важче за обох сусідів, то *обране* слонення знаходиться ліворуч, а якщо легше – то праворуч. Далі ми обираємо середнє слонення у тій половині, що залишилась, але порівнюємо його вагу лише з одним сусідом. Наприклад, якщо ми пішли у ліву половину і перевіряємо верхнє центральне слонення, то його потрібно порівнювати із правим нижнім сусідом: якщо верхнє важче, то особливе слонення буде праворуч, а якщо легше – то ліворуч. Аналогічно задаються правила для перевірки верхнього слонення, якщо ми пішли у праву половину, та правила перевірки нижнього центрального слонення в обох варіантах.

Таким чином, для пошуку *особливого* слонення знадобиться два початкових зважування та ще не більше ніж 6 зважувань (максимальна кількість ділень навпіл для 50-ти слоненят).

5. Нехай ABC – гострокутний трикутник, AH і BF – його висоти, S – описане коло чотирикутника $ABHF$, а S_1 – коло, яке дотикається до висот AH і BF , а також до дуги AB кола S , яка не містить точок H і F . Нехай M та N – точки дотику кола S_1 до висот AH і BF відповідно. За допомогою циркуля та лінійки побудувати трикутник ABC за вершинами A та B та прямою MN . (Д. Соскін)

Розв'язок:

- 1) Аналіз задачі.

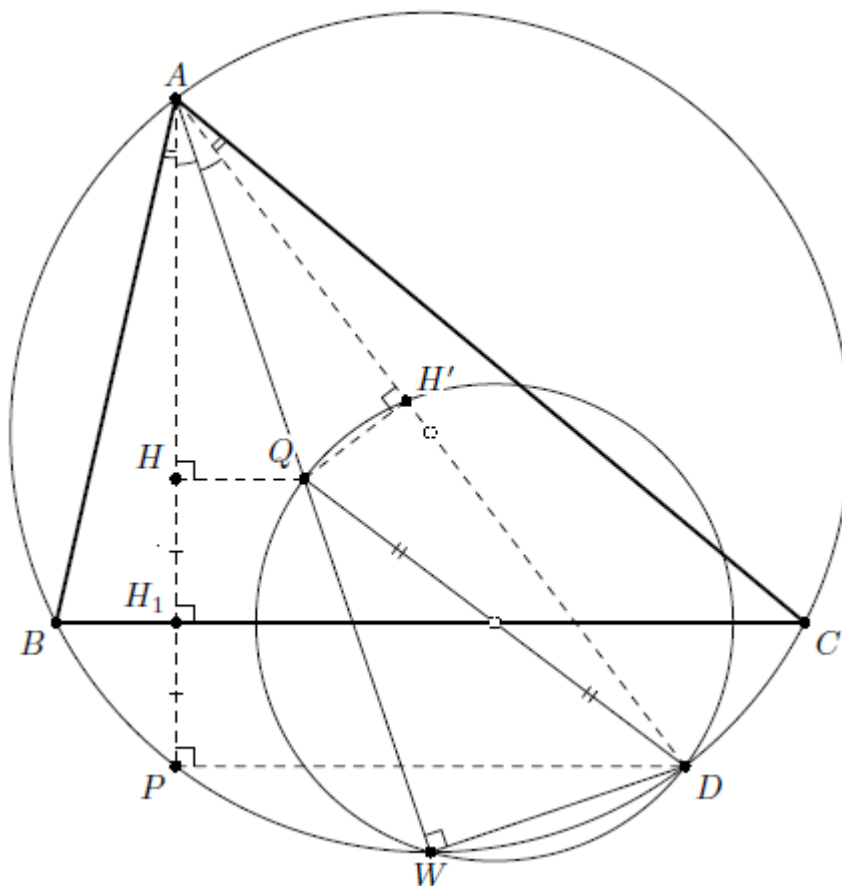


Оскільки кут AHB прямий, то AB – діаметр кола S . Точка перетину бісектрис кутів AHB та AFB (позначимо її як W) співпадає із серединою дуги AB . За твердженням задачі номер 3.48 [Прасолов В.В. Геометрія. – М.: МЦНМО, 2007] маємо, що інцентри трикутників AHB та AFB належать прямій MN . Тоді точки перетину прямих HW та FW з прямою MN (точки I_1 та I_2) є відповідними інцентрами трикутників AHB і AFB . За теоремою «трилисника» маємо $WA = WI_1 = WI_2 = WB$.

2) Побудова. Будуємо на AB як на діаметрі коло та знаходимо точку W – середину тієї дуги AB , яка не перетинається з прямою MN . Радіусом WA з центром в точці W робимо дві засічки на прямій MN – це точки I_1 та I_2 . Подвоївши кут ABI_1 , знаходимо пряму BC ; аналогічно будується пряма AC . Трикутник ABC відновлено.

6. Нехай ω – описане коло гострокутного трикутника ABC . Бісектриса кута A вдруге перетинає ω в точці W , AD – діаметр ω . Нехай H' – точка, симетрична до ортоцентру H трикутника ABC відносно прямої AW . Доведіть, що центр описаного кола трикутника WDH' належить прямій BC . (Д. Хілько)

Розв'язок:



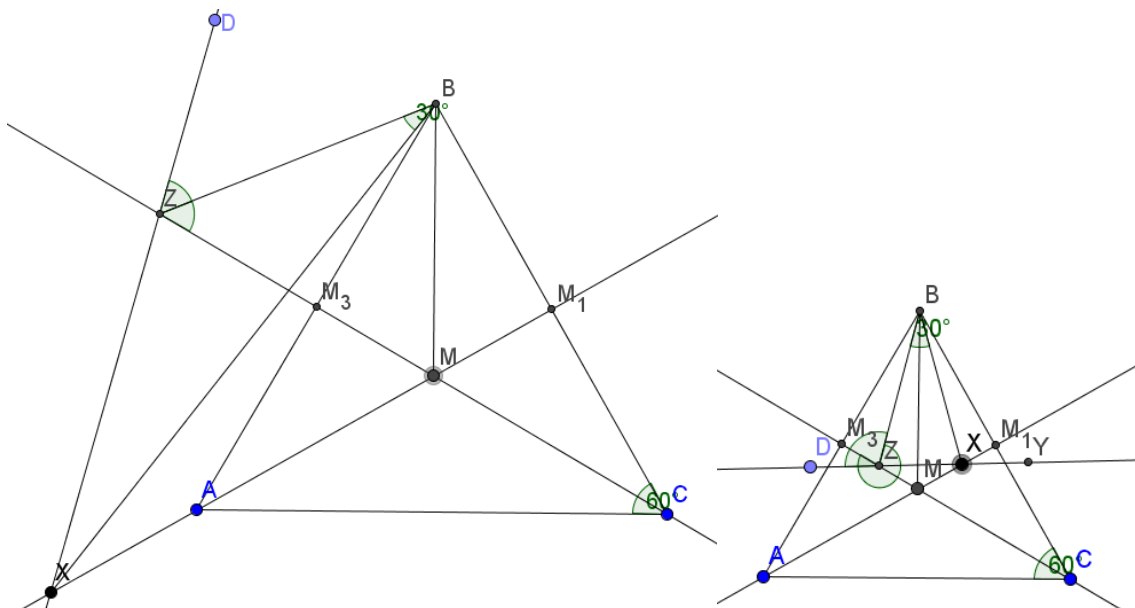
Нехай H_1 – основа висоти, опущеної з вершини A на сторону BC . Як відомо, $\angle BAH_1 = \angle DAC$, отже, AW є також бісектрисою кута $\angle H_1AD$ і точка H' повинна належати AD .

Нехай описане коло трикутника $H'DW$ перетинає пряму AW вдруге в точці Q . Оскільки AD – діаметр кола ABC , то $\angle QWD = \angle AWD = 90^\circ$. Звідси маємо $\angle QH'A = 90^\circ$ та, із міркувань симетрії, $\angle QHA = 90^\circ$.

Нехай продовження висоти AH_1 перетинає коло ABC в точці P . Тоді $\angle APD = 90^\circ$, звідки $HQ \parallel H_1C \parallel PD$, тобто $QHPD$ – трапеція. Крім того, як відомо, $HH_1 = H_1P$, тому пряма BC проходить паралельно до основ цієї трапеції через середину бічної сторони. Отже, BC проходить через середину іншої бічної сторони QD . З іншого боку, відрізок QD – діаметр описаного кола трикутника $H'DW$, а його середина є центром цього кола.

7. Нехай M_1 та M_3 – середини сторін BC та AB рівностороннього трикутника ABC відповідно. На прямій AM_1 обрано довільну точку X , а точку Y обрано таким чином, що XB – бісектриса кута YXA . Нехай прямі XY та CM_3 перетинаються в точці Z . Знайдіть кут ZBX . (Д. Єршов)

Розв'язок:



Нехай X лежить на промені MA . Тоді за умовою $\angle ZXB = \angle BXM$, $\angle ZMB = \angle BMM_1$ (рівносторонній трикутник) і точка B – центр зовнівписаного кола трикутника ZXM . У такому випадку кут $\angle ZBX = \frac{1}{2} \angle ZMX = 30^\circ$.

Нехай X лежить на MM_1 . Тоді B знову є центром зовнівписаного кола трикутника XZM . Як відомо, інцентр, центр зовнівписаного кола та дві відповідні вершини лежать на одному колі, тому шуканий кут дорівнює $180^\circ - \left(90^\circ + \frac{120^\circ}{2}\right) = 30^\circ$.

Розглянемо на промені AM_1 точку B_1 таку, що $AM_1 = M_1B_1$. Випадок, коли точка X належить відрізку M_1B_1 , розглядається так само, як випадок точки X на промені MA .

У всіх інших випадках точка B є інцентром тупокутного трикутника MXZ з кутом при вершині M , який дорівнює 120° . Тоді за відомою теоремою шуканий кут дорівнює $90^\circ + \frac{120^\circ}{2} = 150^\circ$.

8. Дано паралелограм $ABCD$ з центром у точці O . Коло ABO перетинає сторони BC та DA у точках P та Q відповідно. Коло PCO та QDO вдруге перетинаються у точці K . Довести, що ортоцентр трикутника KPQ належить перпендикуляру, проведеному з точки O на пряму BC . (М. Плотніков)

Розв'язок:

Нехай H – ортоцентр трикутника KPQ . Тоді кути $\angle DAC$, $\angle OPQ$ та $\angle BCA$ рівні та коло, описане навколо трикутника POC , дотикається відрізка PQ (за теоремою про кут між хордою та дотичною). Аналогічно PQ дотикається й кола QOD . Тоді сума кутів $\angle OPQ$ та $\angle PQO$ дорівнює куту $\angle PKQ$, тобто точка O належить колу, описаному навколо трикутника PHQ , а пряма OK є медіаною трикутника OPQ (за теоремою про квадрат дотичної). Отже, пряма OK паралельна до прямої BC , оскільки вона ділить відрізки PQ та BD навпіл.

Скористаємось твердженням, що точка, симетрична ортоцентру трикутника відносно його сторони, співпадає з діаметрально протилежною до однієї із вершин точкою. Застосувавши це твердження до трикутника PHQ , одержимо, що кут $\angle KOH$ – прямий (оскільки суміжний з ним кут спирається на діаметр кола, описаного навколо трикутника PHQ). Звідси випливає твердження задачі.

