XX олімпіада з математики Русанівського ліцею

4 квітня 2015 р.

6 клас. I тур.

1. На острові живе 1234 мешканці, кожен з яких або лицар (котрий завжди говорить правду) або брехун (який завжди бреше). Якось усі жителі острова розподілилися по парах і кожен про свого партнера сказав: «Він – лицар!» або «Він – брехун!». Чи могло статися так, що загалом одних й інших фраз сказано було порівну?

Розв'язання:

Розглянемо всі можливі пари. Лицар (далі «Л») – брехун (далі «Б») один одному кажуть: «Він – брехун!». А пари «Л» - «Л» та «Б» - «Б» кажуть своєму сусідові: «Він – лицар!». Отже, у кожній парі кажуть однакову фразу. Загалом пар 1234 : 2 = 617, що є числом непарним. Але кожній парі, яка каже фрази «Ти – лицар!», повинна відповідати пара, в якій двоє кажуть «Ти – брехун!», для рівності сказаних фраз. Але кількість пар непарна. Тому це не є можливим.

Відповідь: не могло.

2. Годинник Максима відстає на 8 хвилин, але він думає, що годинник поспішає на 2 хвилини. Годинник Сашка навпаки поспішає на 2 хвилини, але він думає, що він відстає на 8 хвилин. Друзі домовились, що зустрінуться о 17 годині. Хто прийде першим та скільки хвилин буде чекати?

Розв'язання:

Оскільки годинник Максима відстає на 8 хвилин, та ще він думає, що годинник поспішає на 2 хвилини, то Максим прийде на 8 + 2 = 10 хвилин пізніше запланованого часу, тобто о 17.10. Але годинник у Сашка поспішає на 2 хвилини, та ще від думає, що вони відстають на 8 хвилин, що означає, що Сашко прийде на 2 + 8 = 10 хвилин раніше, тобто о 16.50.

Відповідь: Сашко прийде на 20 хвилин раніше за Максима.

3. У країні «Константа» постійний клімат: щопонеділка й щосереди йдуть дощі, по суботах – туман, а в інші дні – сонячна погода. Ранком якого дня тижня необхідно розпочати похід групі туристів, якщо вони бажають іти 44 дні із найбільшою кількістю сонячних днів?

Розв'язання:

Помітимо, що в 44 днях завжди повних 6 тижнів та ще 2 дні. Погода серед тижня стабільна, тобто для найбільшої кількості днів необхідно, щоб дні, що залишилися, були сонячними. Тобто якщо почати похід у четвер (або два перших дні, або перший та останній, або два останніх дні сонячні) кількість сонячних днів найбільша ($6 \cdot 4 + 2 = 26$ сонячних днів).

Відповідь: Четвер.

4. Касир продав усі квитки в перший ряд кінотеатру, причому помилково на одне з місць було продано 2 квитки. Сума номерів місць усіх проданих квитків виявилась 86. На яке місце було продано 2 квитки?

Розв'язання:

Сума чисел від 1 до 11 дорівнює 66, тому, навіть якщо на 11 місце було продано 2 білети, то суми не достатньо. З іншого боку 13 місць бути не могло, бо сума в 1 до 13 дорівнює 91, що вже більше навіть без повторних місць. Того в першому ряді кінотеатру 12 місць. Сума від 1 до 12 дорівнює 78, та ще 86 – 78 = 8 зайвих номерів. Отже, двічі продано було білет на 8 місце.

Відповідь: 8 місце.

5. Знайдіть значення виразу:

$$\frac{8+222\cdot444\cdot888+444\cdot888\cdot1776}{2\cdot4\cdot8+444\cdot888\cdot1776+888\cdot1776\cdot3552}$$

Розв'язання:

Помітимо, що $8 = 1\cdot2\cdot4$, і кожен із множників знаменника в 2 рази більший за відповідний множник у чисельнику. Тоді перепишемо так:

$$\frac{1\cdot2\cdot4+222\cdot444\cdot888+444\cdot888\cdot1776}{2\cdot2\cdot2\cdot(1\cdot2\cdot4)+2\cdot2\cdot2\cdot(222\cdot444\cdot888)+2\cdot2\cdot2\cdot(444\cdot888\cdot1776)}=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot4+222\cdot444\cdot888+444\cdot888\cdot1776}{8\cdot(1\cdot2\cdot4+222\cdot444\cdot888+444\cdot888\cdot1776)}=\frac{1}{8}$$

6 клас. ІІ тур.

6. Якщо йти вниз по ходу ескалатора, який рухається, то на спуск витрачається 1 хвилина. Якщо збільшити свою швидкість в 2 рази, то спускаєшся за 45 секунд. Скільки часу витратиш, якщо стояти на ескалаторі?

Розв'язання:

Так як 60 : 45 = $\frac{4}{3}$, то в другому випадку за хвилину можна було б пройти $\frac{4}{3}$ ескалатора, тобто на $\frac{1}{3}$ більше, ніж у першому випадку. Це відбувається через збільшення швидкості в два рази. Тобто за хвилину в першому випадку людина проходить $\frac{1}{3}$ ескалатора. Тоді, якщо стояти на ескалаторі, спуск займе $1:\frac{2}{3}=1{,}5$ хвилини.

Відповідь: 1,5 хвилини.

7. Скільки всього існує чотиризначних чисел, які діляться й закінчуються на 19?

Розв'язання:

Нехай шукане число $\overline{xy19}=\mathrm{N}$. Тоді число N – 19 також кратне 19. Але N – 19 = $\overline{xy00}=\overline{xy}\cdot100$. Але 100 і 19 – взаємно прості, то $\overline{xy}$ ділиться на 19. А таких чисел усього п'ять: 19, 38, 57, 76 та 95. Перевіряючи, упевнюємося, що дані числа задовольняють умову.

Відповідь: 5 чисел.

8. Коли Віні-Пух прийшов до Кролика, він з'їв 3 тарілки меду, 4 тарілки згущеного молока та 2 тарілки джему, після чого не зміг вийти назовні, бо сильно погладшав. Але відомо, що якби він з'їв 2 тарілки меду, 3 тарілки згущеного молока й 4 тарілки джему чи 4 тарілки меду, 2 тарілки згущеного молока й 3 тарілки джему, то спокійно б залишив нору гостинного Кролика. Від чого гладшають більше: від джему чи від згущеного молока?

Розв'язання:

За умовою «3 меду (далі «м») + 4 згущеного молока (далі «з») + 2 джему (далі «д») > 2м + 3з + 4д». Звідки слідує, що «м + з > 2д». З умови «3м + 4з + 2д > 4м + 2з + 3д», звідки «2з > м + д». Додаючи дві нерівності-висновка, отримаємо «м + 3з > м + 3д», тобто «з > д».

Відповідь: Від згущеного молока гладшають більше.

7 клас. І тур.

1. Подайте число $2 \cdot 2014^2 + 2 \cdot 2015^2$ у вигляді суми квадратів двох натуральних чисел.

Розв'язання:

1 спосіб: легко перевірити, що $2a^2 + 2b^2 = (a-b)^2 + (a+b)^2$. При $a = 2014, b = 2015$ маємо: $2 \cdot 2014^2 + 2 \cdot 2015^2 = (2014 - 2015)^2 + (2014 + 2015)^2 = 1^2 + 4029^2$.

2 спосіб: легко перевірити, що $2a^2 + 2(a+1)^2 = (2a+1)^2 + 1$. При $a = 2014$ маємо: $2 \cdot 2014^2 + 2 \cdot 2015^2 = 4029^2 + 1^2$.

Відповідь: $4029^2 + 1^2$.

2. Записали два числа – перше та друге. До першого додали друге та отримали третє, до другого додали третє – отримали четверте і так далі. Знайдіть суму перших шістьох записаних чисел, якщо п'яте число дорівнює 2015.

Розв'язання:

Нехай перше число a, друге b, третє дорівнює $(a+b)$, четверте число $(a+2b)$, п'яте $(2a+3b)$, а шосте $(3a+5b)$. Тоді сума перших шістьох чисел дорівнює $a + b + (a+b) + (a+2b) + (2a+3b) + (3a+5b) = 8a + 12b = 4(2a+3b)$. Тобто шукана сума в чотири рази більша за п'яте число. $2015 \cdot 4 = 8060$.

Відповідь: 8060.

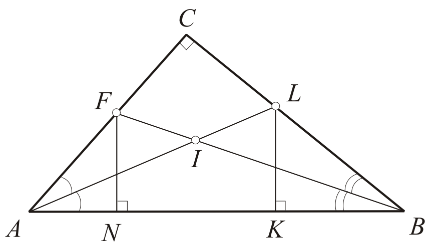
3. Розв'яжіть рівняння в натуральних числах: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$.

Розв'язання:

Помітимо, що добуток дробів $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ дорівнює $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = \frac{xyz}{xyz} = 1$. Якщо всі три дроби є правильними (менше від 1), то їх добуток також є правильним дробом (менше від 1). Отже, хоча б один із них є неправильним (більшим або рівним 1). Але тоді сума цих дробів буде більшою від 1. Таким чином, рівняння не має розв'язків в натуральних числах.

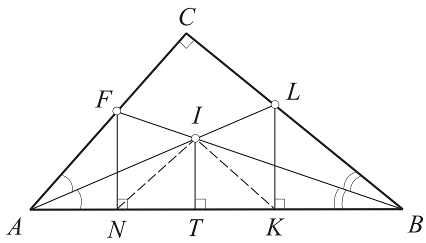
Відповідь: рівняння не має розв'язків в натуральних числах.

4. *AL* та *BF* – бісектриси в прямокутному трикутнику *ABC* (*AB* – гіпотенуза). *LK* та *FN* – перпендикуляри з точок *L* та *F* до *AB*. Знайдіть довжину відрізка *KN*, якщо відомо, що радіус вписаного в трикутник *ABC* кола дорівнює *r*. (А. Корнієнко).



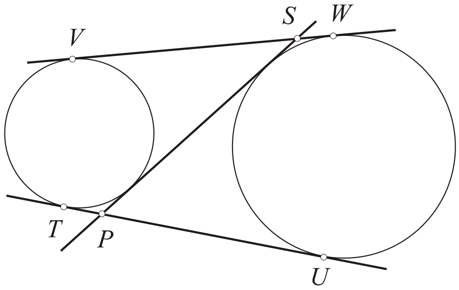
Розв'язання:

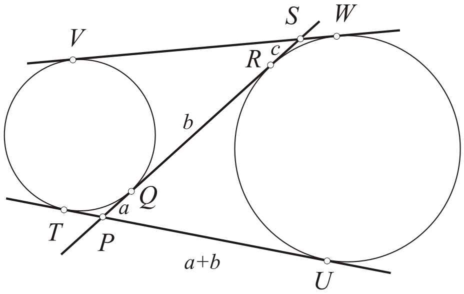
Нехай *AL* та *BF* перетинаються в точці І. Проведемо *IT = r* перпендикулярно до *AB*. З рівностей трикутників *BFC* та *BFN* випливає $\angle BFC = \angle BFN$. Отже, *FB* - зовнішня бісектриса в трикутнику *AFN*. Оскільки *AL* - внутрішня бісектриса для цього трикутника, то NI є другою зовнішньоє бісектрисою в трикутнику *AFN*. Тоді $\angle INT = 45°$ і *NT=IT=r.* Аналогічно показуємо, що *KI* - зовнішня бісектриса в трикутнику *BLK* і *KT=IT=r*. Отже, *KN = KT + TN = 2r*.



Відповідь: *KN* = 2*r*.

5. Два кола не мають спільних точок і знаходяться зовні одне одного. *VW* та *TU* - їх зовнішні дотичні, а *SP* – внутрішня дотична (точки *S* і *P* належать відрізкам *VW* та *TU* відповідно). Доведіть, що *VW=TU=SP*. (Сангаку, японська храмова геометрія).





<u>*Доведення*</u>:
Нехай *PQ=a*, *QR=b*, *RS=c* (див. рисунок). Тоді *TP=PQ=a(за властивістю дотичних до кола)*. Аналогічно *PU=PR=a+b* і *TU=2a+b.* Так само *VW=2c+b*. Але *VW=TU*, тобто *2a+в=2c+в*, звідки *a=c.* Отже, *VW=2a+b=PS=TU.*

7 клас. II тур.

6. Сашко та Марійка грають у «Русанівський бій». На дошці 10×10 вони по черзі розміщують фігурки: Сашко — квадратики 2×2, а Марійка — «куточки» з трьох клітинок (Рис. 1) таким чином, щоб вони не накладалися. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто виграє при правильній грі та як необхідно грати, якщо гру починає Сашко?

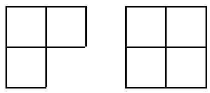


Рис. 1

<u>*Розв'язання*</u>:
Покажемо, як має грати Марійка. Після першого ходу гри (який робить Сашко) поблизу одного з вільних кутів дошки 10×10 вона розміщує свій «куточок», «резервуючи» таким чином за собою «запасний» хід безпосередньо в куті дошки (Рис. 2).

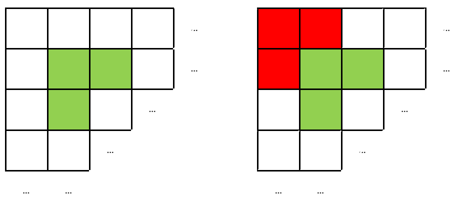


Рис. 2

Сашко не зможе розмістити квадратик 2×2 на визначених клітинках, тому цей хід для Марійки завжди залишатиметься можливим. Припустимо, що в певний момент гри вона не має інших ходів, окрім «запасного». Тоді після цього ходу Марійки Сашко не зможе зробити свій черговий хід, адже в протилежному випадку Марійка на попередньому кроці могла зайняти своїм «куточком» 3 із 4 клітинок того місця, де Сашко розмістить квадратик 2×2, що суперечить припущенню. Отже, за вказані перший та останній ходи, Марійка виграє незалежно від ходів Сашка.

<u>*Відповідь*</u>: Марійка виграє незалежно від ходів Сашка.

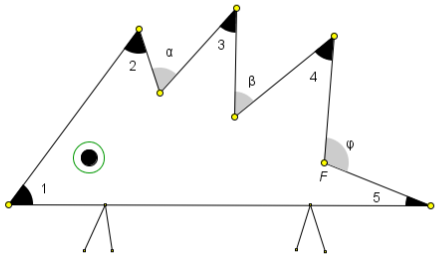
7. Петрик може виконувати з числами лише дві операції: множити число на 3 та переставляти цифри числа в довільному порядку. Чи зможе він із числа 1 отримати число, що складається з 18 одиниць?

Розв’язання:

Помітимо, що останньою операцією, у результаті якої щось змінюється, могло бути лише множення на 3. Якщо розділити число з 18 одиниць на 3, то отримаємо число 373737373737, яке не ділиться на 9, оскільки сума його цифр дорівнює 60. З іншого боку, після перших двох операцій Петрик отримає число 9. Отже, усі наступні числа повинні ділитися націло на 9. Отримане протиріччя доводить, що із числа 1 отримати число, що складається з 18 одиниць неможливо.

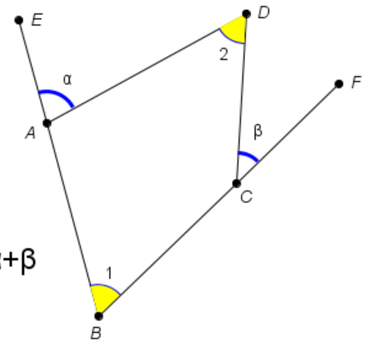
Відповідь: не зможе.

8. Веселий їжачок має 8 кутів (необов’язково рівних): 1; 2; 3; 4; 5; α; β; φ (див. рисунок). Довести, що $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5 = \alpha + \beta + \varphi$.



Доведення:

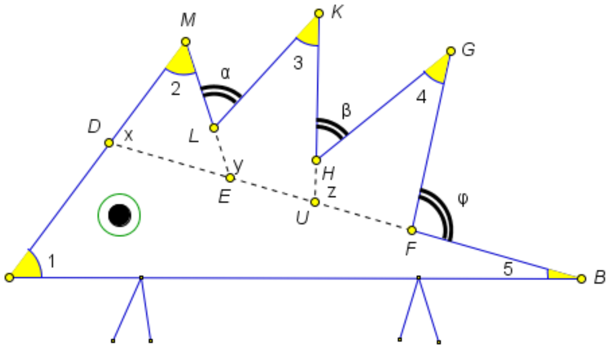
Скористаємося наступною лемою: $\angle 1+\angle 2=\alpha+\beta$ (кути 1; 2; α; β у загальному випадку не є рівними). Для доведення леми достатньо провести відрізок *BD* та двічі застосувати теорему про зовнішній кут трикутника (для трикутників *ABD* і *CBD*).



$\angle 1+\angle 2=\alpha+\beta$

Тоді маємо (див. рисунок):

1. $\angle X=\angle 1+\angle 5$(зовнішній кут для трикутника *ADB*).
2. $\angle Y=\angle X+\angle 2=\angle 1+\angle 5+\angle 2$ (зовнішній кут для трикутника *DME*).
3. $\angle Y+\angle 3=\alpha+\angle Z$, звідки $\angle Z=\angle Y+\angle 3 - \alpha$ (згідно з лемою – для чотирикутника *LKUE*).
4. $\angle Z+\angle 4=\beta+\varphi$ (за лемою – для чотирикутника *UHGF*). Далі скористаємося пунктом (3) і отримаємо: $\angle Y+\angle 3 - \alpha+\angle 4= \beta+\varphi$. Підставимо значення $\angle Y$ з пункта (2) . Маємо: $\angle 1+\angle 5+\angle 2+\angle 3 - \alpha+\angle 4= \beta+\varphi$, або $\angle 1+\angle 5+\angle 2+\angle 3 +\angle 4= \alpha +\beta+\varphi$.



8 клас.

1. Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має корені x_1 та x_2, де a, b, c, x_1 та x_2 – п'ять різних послідовних цілих чисел (не обов`язково в такій послідовності). Знайдіть це рівняння.

Розв'язання:

Припустимо, що всі п'ять цілих чисел одного знаку. Тоді, за теоремою Вієта, $c = ax_1x_2$. Отже, абсолютна величина c перевищує мінімальну з абсолютних величин чисел a, x_1 та x_2 хоча б у шість разів (мінімальна абсолютна величина хоча б 1, тоді інші дві хоча б 2 та 3). Але тоді ці два числа відрізняються хоча б на 5, тобто не можуть входити в п'ять послідовних цілих чисел. Таким чином, поміж даних п'яти чисел є числа різних знаків. Отже, серед них є число 0. Число 0 не може бути першим коефіцієнтом, оскільки це квадратне рівняння. Число 0 не може бути коренем рівняння, оскільки в такому випадку, c також дорівнює 0. Та навпаки, 0 не може бути вільним членом, оскільки один з коренів рівняння також буде дорівнювати 0.

Отже, $b = 0$. А тому $x_1 = -x_2$. Це можуть бути тільки числа ±1 та ±2. Другий варіант неможливий, бо в такому випадку $c = -a = \pm 1$, з іншої сторони $c = ax_1x_2 = -4a$.

Залишається варіант, коли корені рівняння дорівнюють ±1. В такому випадку коефіцієнти повинні бути рівні по абсолютній величині, тому $a = -c = \pm 2$. Не важко побачити, що обидва варіанти підходять.

Відповідь: $2x^2 - 2 = 0$ або $-2x^2 + 2 = 0$.

2. Петро та Василь зробили в тирі по 5 пострілів. Першими трьома пострілами вони вибили однакову кількість очок, а останніми трьома Петро вибив у три рази більше очок, ніж Василь. На мішені залишились пробоїни в 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2 очок. Куди влучив кожен із них третім пострілом? Наведіть усі можливі варіанти відповідей та доведіть, що інших немає.

Розв'язання:

Останніми трьома пострілами Василь не міг вибити більше, ніж 9 очок (інакше Петро вибив би останніми трьома пострілами не менше 30). Менше 9 очок Василь також вибити не міг, оскільки найменша сума за три постріли 2 + 3 + 4 = 9. Відтак, Василь вибив 2, 3 та 4 очки, а Петро 10, 9, 8 очок (інших варіантів набрати 27 очок за три постріли нема). Отже, першими двома пострілами хлопці вибили 9, 8, 5, 4 очки. При цьому Петро третім пострілом вибив не менше, ніж 8, а Василь – не більше ніж 4 очки. Оскільки першими трьома пострілами вони вибили однакову кількість очок, то першими двома пострілами Петро вибив принаймні на чотири очки менше, ніж Василь. Єдина можливість – Василь вибив 9 та 8, а Петро 5 та 4 очки, тому, третім пострілом Василь вибив 2, а Петро 10 очок.

Відповідь: Третім пострілом Петро вибив 10, а Василь – 2 очки.

3. Дано число, у якому всі цифри різні та йдуть у порядку зростання. Знайти суму цифр числа, яке в дев'ять разів більше за дане.

Розв'язання:

Якщо дано число $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, то знайти необхідно суму чисел числа $9A$.

Запишемо це число наступним чином:

$$9A = 10A - A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n 0} - \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Знайдемо різницю

$$
\begin{array}{r}
- \quad a_1 a_2 \dots a_n \quad\ 0 \\
a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \\
\hline
a_1(a_2 - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})(10 - a_n)
\end{array}
$$

отже,

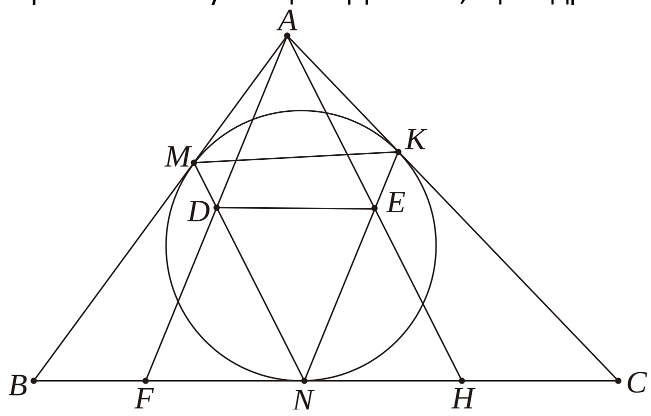
$$9A = a_1(a_2 - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})(10 - a_n)$$

Запишемо тепер суму цифр числа 9*A*:

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + (10 - a_n) - 1 = 10 - 1 = 9$$

Відповідь: 9.

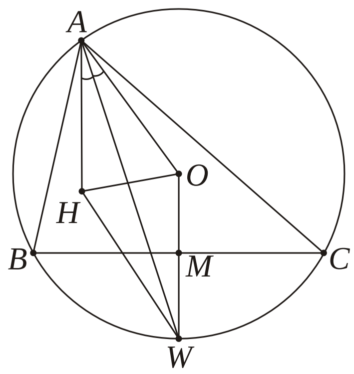
4. У трикутник *ABC* вписане коло, яке дотикається до сторін *AB, BC* і *AC* в точках *M*, *N* і *K* відповідно. Точки *H* і *F* обрані на стороні *BC* в такий спосіб, що *AH* паралельно *MN*, а *AF* паралельно *KN*. *NK* перетинає *AH* у точці *E*, *AF* перетинає *MN* у точці *D*. Довести, що відрізок *ED* паралельний *BC.*

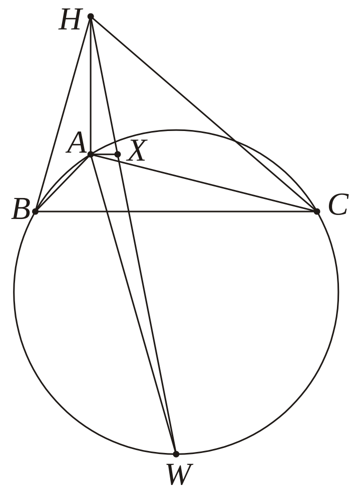


Розв'язання:

Оскільки *AF* || *KN* і *CN* = *CK*, то *FN* = *AK*. Аналогічно отримуємо, що *NH* = *AM*. *AM* = *AK*, як відрізки дотичної, тобто *FN* = *NH*. Розглянемо трикутник *AFH*: у ньому *N* середина сторони *FH*, *NE* і *ND* - його середні лінії, тому *DE* паралельно *BC*.

5. У трикутнику *ABC*, *H* – точка перетину висот, а *W* – точка перетину продовження бісектриси кута А з описаним колом. Виявилося, що *AH* = *HW*. Знайти кут *BAC*.(*Т. Баценко*)

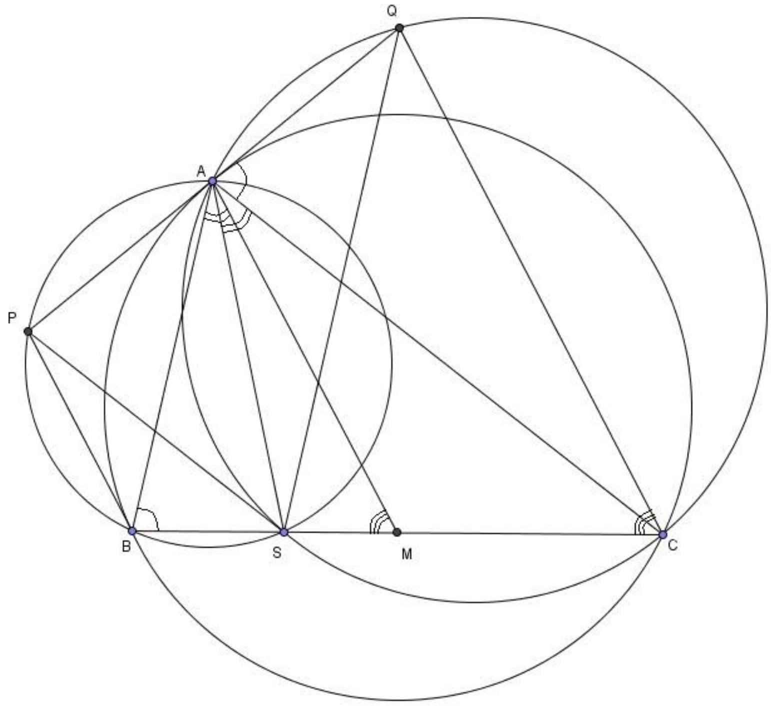




Розв'язання:

Припустимо, що кут *BAC* гострий. Легко показати, що кути *HAB* і *OAC* рівні, отже, бісектриса кута *BAC* є бісектрисою кута *HAO*. Очевидно, що *HO* перпендикулярно *AW*, тому трикутник *HAO* рівнобедрений. Нехай радіус описаного кола трикутника *ABC* дорівнює *R*. Відомо, що *AH* = 2*OM*, де *M* – середина сторони *BC*. Розглянемо прямокутний трикутник *OMC*: *OM* = *R* / 2, *OC* = *R*, значить $\angle OCM = 30^\circ$ градусів, у той же час кут *OCM* дорівнює 90 - $\angle BAC$, отже, $\angle BAC = 60^\circ$. Якщо кут *BAC* тупий, то проведемо через *A* пряму паралельну *BC*, яка перетне *HW* у *X*, тоді бачимо, що *HW* = *HX* + *XW*, *HX* > *HA*, звідки *HW* > *AH*, що суперечить умові.

6. У трикутнику ABC проведено пряму *AS,* симетричну медіані відносно бісектриси кута *BAC* (точка *S* належить стороні *BC*). ω, ω_1 і ω_2 – кола, описані навколо трикутників *ABC*, *BAS* і *CAS* відповідно. Дотична до ω у точці *A* перетинає ω_1 і ω_2 у *P* і Q. Довести, що *PA = QA.* *(М. Плотніков)*



<u>Розв'язання</u>:

Нехай *M* – середина сторони *BC*. $\angle ABC = \angle CAQ$, оскільки кут між дотичною й хордою дорівнює половині дуги, що стягує хорда. $\angle CSQ = \angle CAQ$ як кути, що спираються на одну дугу, отже $\angle ABC = \angle CSQ$. $\angle BAM = \angle SAC$ – за умовою, а $\angle SAC = \angle SQC$ як вписані кути, що спираються на одну дугу. Таким чином $\angle BAM = \angle SQC$, звідки отримаємо, що трикутники *BAM* і *SQC* подібні по двох кутах, а значить $\angle QCS = \angle AMB$, тому *AM* || *QC*. Аналогічно отримуємо, що *AM* || *PB*. Враховуючи, що *BM* = *MC*, за теоремою Фалеса маємо *PA* = *AQ*.

Командная 9-10

1. Маємо *n* купок по 2 камінці в кожній ($n \geq 5$). На кожному кроці дозволяється взяти купку, що містить максимальну парну кількість камінців, і половину камінців з неї перекласти в будь-яку іншу купку. Гра закінчується тоді, коли неможливо зробити такий хід. Яку максимальну кількість камінців можна одержати в одній купці по закінченню гри? Відповідь обґрунтуйте.

<u>*Розвя'зання*</u>:

Оберемо дві довільні купки і на першому кроці перекладемо один камінець з однієї в іншу; купку з одним камінцем виключаємо з розгляду.

Візьмемо ще три купки і виконаємо таку послідовність дій:

$$(3, 2, 2, 2) \to (3, 3, 1, 2) \to (3, 4, 1, 1) \to (5, 2, 1, 1).$$

Таким чином, обробивши перші п'ять купок, ми одержали купку з п'яти камінців, купку з двох камінців та три купки з одного камінця. Ми можемо повторювати наведену послідовність дій, обираючи нові пари купок по два камінця замість тих двох купок, в яких залишилось по одному камінцю, та перекладаючи в такий спосіб по два камінця у першу купку.

Якщо $n = 2t$, то ми переберемо всі пари купок, окрім перших п'яти, і докинемо в першу купку загалом $n-1$ камінець. В останніх двох купках з двох камінців перекладемо один камінець з однієї купки до іншої і завершимо тим самим гру: на полі залишаться купки $(n-1, 3, 1, 1, \ldots)$. При цьому ми не можемо одержати максимальну кількість ($n+1$ камінець) через те, що докидати камінці у найбільшу купку потрібно кожен раз на парну кількість: якщо докинути непарну кількість, то на наступному кроці найбільша купка за правилами гри повинна бути розділена. Отже, на кожному кроці ми можемо докинути у найбільшу купку мінімум два камінці – а тому в якійсь іншій купці також буде два камінці, тобто щонайменше один «зайвий» камінець ніколи не потрапить до найбільшої купки; оскільки ж наприкінці гри в кожній купці повинна бути непарна кількість камінців, то максимальна досяжна кількість – це $n-1$.

Якщо $n = 2t+1$, то гра не закінчиться ніколи. Дійсно, гра закінчується, коли в кожній купці буде непарна кількість камінців; тому і загальна кількість камінців повинна бути непарною. Однак спочатку в усіх купках було $2n$ камінців. Отже, ми ніколи не дістанемось ситуації, коли хід зробити неможливо.

2. За яких умов рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ має три дійсні корені, які є послідовними членами деякої арифметичної прогресії?

<u>*Розвя'зання*</u>:

Позначимо $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, і нехай $x_0 - d, x_0, x_0 + d$ є коренями $f(x)$. За теоремою Вієта маємо $(x_0 - d) + x_0 + (x_0 + d) = 3x_0 = -a$, звідки $x_0 = -\frac{a}{3}$. Але число $x_0 = -\frac{a}{3}$ буде коренем тоді, коли $f\left(-\frac{a}{3}\right) = 0$, тобто

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0. \qquad (*)$$

Якщо $x_0 = -\frac{a}{3}$ є коренем $f(x)$, то $f(x) = \left(x + \frac{a}{3}\right)\left(x^2 + \frac{2a}{3}x + b - \frac{2a^2}{9}\right)$. За умовою $f(x)$ має три дійсні корені, тому квадратне рівняння у дужках повинно мати два дійсні корені, що можливо лише тоді, коли $D > 0$; звідси маємо:

$$D = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 4\left(b - \frac{2a^2}{9}\right) = \frac{4}{3}(a^2 - 3b) > 0,$$

$$a^2 - 3b > 0. \qquad (**)$$

Таким чином, рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ має три дійсні корені, які є послідовними членами деякої арифметичної прогресії, тільки тоді, коли $b < \frac{a^2}{3}$ і $c = \frac{9ab - 2a^3}{27}$ при довільному значенні *a*.

3. Шахова фігура «катапульта» б’є всі клітинки, сума відстаней по горизонталі та вертикалі до яких дорівнює двом (тобто або на дві клітинки за прямою, або на одну клітинку по діагоналі). Яку найбільшу кількість катапульт, що не б’ють одна одну, можна поставити на шаховій дошці 8×8?

Розв’зання:

Оскільки катапульти б’ють лише клітки того ж кольору, на якому стоять самі, то білопольні та чернопольні катапульти можна розставляти незалежно. Із міркувань симетрії білопольних та чернопольних катапульт повинна бути однакова кількість.

Покажемо, що на чорних клітинках може стояти не більше десяти катапульт. Розіб’ємо клітинки так, як показано на рисунку:

А		Б		Б		Г	
	А		Б		В		Г
А		Д		В		В	
	Д		Д		В		З
Е		Д		Ж		З	
	Е		Ж		Ж		З
Е		Є		Ж		И	
	Є		Є		И		И

На клітинках, що помічені однаковою літерою, не можна поставити дві катапульти; таким чином, катапульт можна поставити не більше, ніж різних задіяних літер, тобто десять. З іншого боку, десять катапульт можна поставити – наприклад, у клітинках, що на рисунку замальовано сірим кольором.

Таким чином, загальна кількість катапульт, які можна поставити на дошку, щоб вони не били одна одну, дорівнює 20.

4. Позначимо через $S(N, M)$ кількість способів розбити *N* різних об'єктів на *M* груп; наприклад, $S(3, 2) = 3$. Доведіть для довільних натуральних *n*, *l*, *m* тотожність:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot S(k, l) \cdot S(n-k, m) = C_{l+m}^m S(n, l+m).$$

<u>*Доведення*</u>:

Опишемо наступну комбінаторну конфігурацію: розіб'ємо *n* різних об'єктів на *l* «жовтих» та *m* «блакитних» груп. Обчислимо кількість таких конфігурацій.

З одного боку, нам необхідно розбити всі об'єкти на $l+m$ груп, з яких обрати *l* «жовтих». Це можна зробити $S(n, l+m) \cdot C_{l+m}^m$ способами.

З іншого боку, ми могли спочатку обрати ті об'єкти, які увійдуть у «жовті» групи, та розбити їх на *l* груп, а всі інші об'єкти (які, відповідно, увійдуть у «блакитні» групи) розбити на *m* груп. Нехай у нас *k* об'єктів, які увійдуть у «жовті» групи; тоді відповідне розбиття можна виконати $S(k, l) \cdot S(n-k, m)$ способами. Оскільки це можуть бути будь-які об'єкти, то кількість варіантів треба ще помножити на кількість способів обрати ці *k* об'єктів з усіх, тобто C_n^k. Нарешті, сама кількість «жовтих» об'єктів може бути довільною, тому треба розглянути всі можливі випадки $k = 0, 1, ..., n$ і просумувати відповідні кількості вариантів. Таким чином, загальна кількість наведених конфігурацій описується числом $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot S(k, l) \cdot S(n-k, m)$.

Звідси випливає твердження задачі.

<u>*Зауваження*</u>*.* Числа $S(N, M)$, що описують кількість розбиттів *N*-елементної множини на *M* непорожніх підмножин, називаються *числами Стірлінга II роду*. Вони виникають у багатьох задачах комбінаторики, теорії імовірностей та теорії поліномів і спеціальних функцій.

5. Усередині кола розташоване коло удвічі меншого радіусу. Проводяться всі можливі хорди *AB* більшого кола, що дотикаються до меншого. Для кожної з них береться середина *C* меншої дуги *AB*. Нехай *X*, точка симметрична *C* відносно прямої *AB*. Знайти ГМТ точок *X*. (*Є. Діомідов*).

<u>*Розвя'зання*</u>:

Нехай радіуси кіл — 2*R* та *R*, а центри — *O* та *I* відповідно. Зрозуміло, що *O*-*X*-*C* — одна пряма (серединний перпендикуляр до *BC*). Нехай *M* — середина *BC* (і також середина *CX*), *N* — середина *OX*, а *K* — точка дотику *AB* до меншого кола. Доведемо що точка *X* лежить на колі *ω* з центром *I* та радіусом *IO*. Випадок *X* = *O* очевидний.

$$MN = MX \pm NX = \frac{CX}{2} \pm \frac{OX}{2} = \frac{CO}{2} = R = KI$$

(знак залежить від порядку розташування точок *O*-*X*-*C*)

У чотирикутнику *INMK* кути *M* і *K* прямі, та *MN* = *KI*. Тому це прямокутник. *IN* перепендикулярно до *OM*. *IN* — медіана і висота трикутника *OIX*. Звідси *IX* = *IO*.

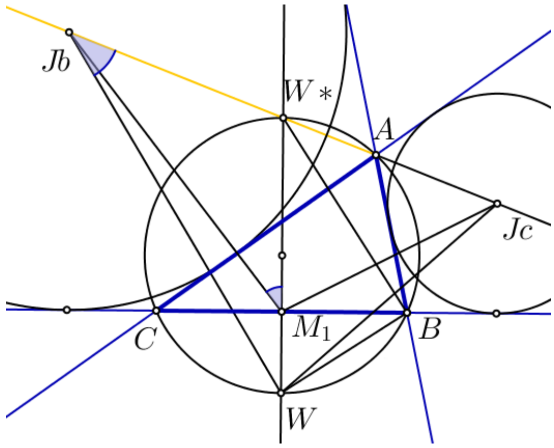
Тепер доведемо що шукане ГМТ — це все коло *ω*, а не лише якась його частина. Оберемо на *ω* довільну точку *X* (вона може співпадати з *O*). Нехай *N* — середина *OX*. Проведемо до *IN* перпендикуляри через *N*. Він пройде через *O* та *X* (якщо *X* = *O*, це очевидно, а інакше *NO* — медіана рівнобедренного трикутника *OIX*). Нехай *C* — одна з точок перетину цього перпендикуляра з більшим колом, M — середина XC, серединний перпендикуляр до XC перетинає більше коло в A та B, K — проекція I на AB. Аналогічно першій половині задачі, $MN = R$. У чотирикутнику $INMK$ кути M, N і K прямі. Тому це прямокутник. $IK = NM = R$. Отже, AB дотикається до меншого кола.

6. У довільному трикутнику ABC точка M_1 – середина сторонни BC, точка L_1 – основа бісектриси з вершини A, точка W – точка перетину бісектриси AL_1 з описаним колом, точки J_b та J_c – центри зовнівписаних кіл, що дотикаються до сторін b і c відповідно. Довести, що

a) точки J_b, J_c, L_1, M_1 лежать на одному колі;

b) L_1 – ортоцентр трикутника J_cWJ_b. (*Д. Басов, Ю. Білецький*)

Доведення:



Лема. $\angle J_bM_1J_c + \angle J_bWJ_c = 180^{\circ}$.

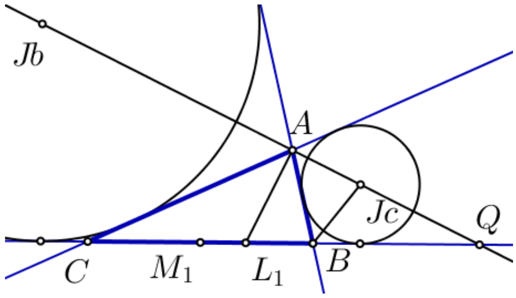
Достатньо довести, що $\angle J_bM_1W^* = \angle WJ_bW^*$ (та, аналогічно, $\angle J_cM_1W^* = \angle WJ_cW^*$).

Рівність кутів отримуємо внаслідок подібності трикутників $J_bM_1W^*$ та WJ_bW^* (отримуємо з рівності $W^*J_b^2 = W^*B^2 = W^*M_1 \cdot WW^*$)

1) Точки $J_bJ_cL_1M_1$ належат одному колу.

Для цього достатньо довести (Q - основа зовнішньої біссектриси), що $QJ_c \cdot QJ_b = QL_1 \cdot QM_1$ (*).

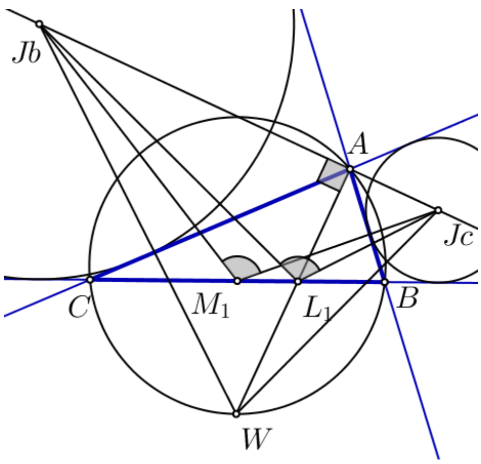
Можно вивести, що: $QL_1 = 2abc/(b^2-c^2)$, $QM_1 = a(b+c)/(2b-2c)$, $QJ_c = AJ_c \cdot a/(b-c)$, $QJ_b = AJ_b \cdot a/(b-c)$. Подставимо це в (*), после скорочень залишається $AJ_c \cdot AJ_b = bc$, що довести не важко.



2) L_1 – ортоцентр трикутника J_cWJ_b.

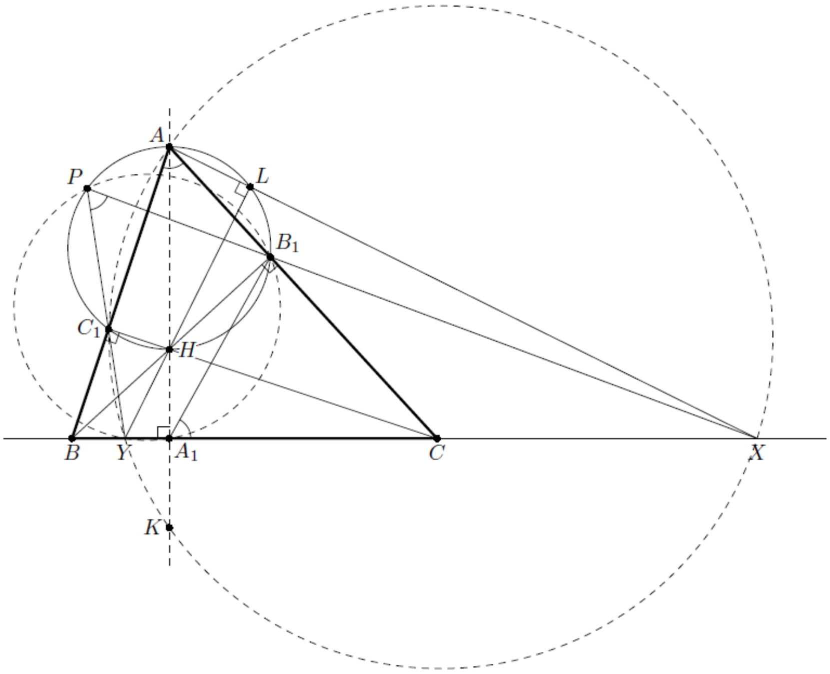
Точка L_1 належить висоті AW трикутника J_cWJ_b, також $\angle J_bL_1J_c$ = (з пункта 1) = $\angle J_bM_1J_c$ = (за лемою) $=180^{\circ} - \angle J_cWJ_b$,

Звідки отримуємо, що L_1 – ортоцентр трикутника J_cWJ_b.

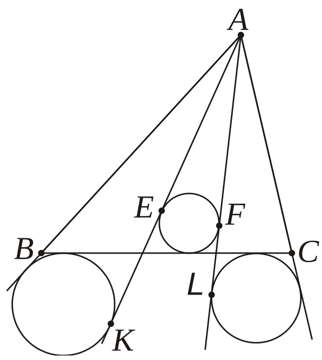


7. В гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BB_1 та CC_1. Точка P рухається по описаному навколо трикутника AB_1C_1 колу. Прямі PB_1 та PC_1 перетинають BC в точках X та Y відповідно. Доведіть, що всі трикутники AXY мають фіксований ортоцентр. (*Д. Хілько*)

Доведення:



Позначим черех ортоцентр H трикутника ABC. Достатньо показати, шо YH перпендикулярно до AX. Справді, нехай основа третьої висоти ABC – A_1. Тоді очевидно, $\angle C_1PB_1 = \angle BAC = \angle B_1A_1C$, звідки PB_1A_1Y – вписаний. Нехай L – друга точка перетину AX с описаним колом AB_1C_1. Тоді $XA \cdot XL = XB_1 \cdot XP = XA_1 \cdot XY$. Отже, ALA_1Y – вписаний. Тоді $\angle YA_1A = \angle YLA = 90^o$. Також, оскільки L лежить на описаному колі трикутника AB_1C_1, $\angle HLA = 90^o$. Тому $\angle ALH = \angle ALY = 90^o$. Звідси Y, H, L на одній прямій, перпендикулярній AX.

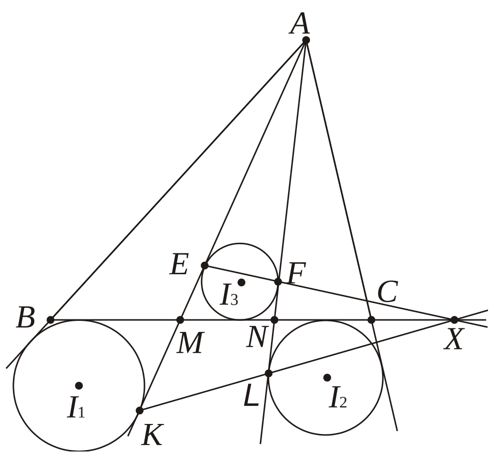


8. Доведіть, що EF, BC і KL перететинаються в одній точці тоді й тільки тоді, коли BAE та CAF – ізогоналі кута BAC. (*М. Плотніков*)

Доведення.

Нехай I_1 – центр зовнівписаного кола трикутника ABM, I_2 – центр зовнівписаного кола трикутника ACN, I_3 — центр вписаного кола в трикутник ANM, а X – точка перетину BC з EF. Згідно теоремі Менелая для трикутника AMN та прямої EF, $MX/XN = ME/FN$.

З подібності трикутників MEI та MKI_1 отримуємо $ME/MK = EI/I_1K = r_1/r$, аналогічно $NF/NL = IF/I_2L = r_2/r$. Тобто, $NL/MK = (NF/ME) \cdot (r_2/r_1)$.



Припустимо, що кути BAM та CAN рівні, тоді, згідно подібності трикутників AI_2L та AI_1K, $AK/AL = I_1K/I_2L = r_1/r_2$. Записав обернену теорему Менелая для трикутника AMN та прямої KL, отримаємо:

$(AK/KM) \cdot (MX/XN) \cdot (NL/LA) = (AK/LA) \cdot (NL/MK) \cdot (MX/XN) = (r_1/r_2) \cdot (NF/ME) \cdot (r_2/r_1) \cdot (ME/FN) = 1$.

Обернена задача доводиться аналогічно.