11-й Київський турнір математичних боїв імені Лесі Рубльової
Математична карусель

Традиційно новий математичний сезон для київських школярів розпочинається в середині вересня проведенням математичної каруселі. Кожного року кількість команд зростає і цього року їх кількість сягнула 143. Якщо цю кількість помножити на 6 учасників у кожній команді, то стає зрозумілим, що за масовістю – це безпрецедентний захід. Для деяких шкіл він так і залишається єдиним, у якому їх учні представляють команду від свого навчального закладу. Хоча більшість навчальних закладів і далі приймає участь в усьому турнірі.

Змагання проходило в чотирьох вікових лігах – наймолодшій (6–7 класи), молодша (8 класи), середня (9 класи) та старша (10–11 класи). Наводимо умови задач з повними розв’язаннями.

Умови задач

Наймолодша ліга. Вихідний рубіж

1. Дід Панас наловив риби. Три найбільші рибини він віддав своєму песику, зменшивши загальну вагу улову на 35%. Потім три найменші рибини він віддав коту, зменшивши загальну масу тієї риби, що залишилась на $\frac{5}{13}$. Решту риби його родина з’їла за обідом. Скільки рибин піймав дід Панас?

2. Скільки існує натуральних чисел n, для яких числа $\frac{1}{3}n$ та $3n$ одночасно є трицифровими натуральними числами?

3. Розшифруйте ребус на додавання, у якому кожній цифрі відповідає своя буква (рис. 1). Серед букв звичайно можуть бути такі, що відповідають і цифрам 0, 1, 2 чи 3. У відповіді наведіть найбільше можливе значення, яке може приймати число $RONDE$.

$$\begin{array}{r} \mathbf{TWEEDE} \\ +\ \ \mathbf{RONDE} \\ \hline \mathbf{2\,3\,0\,3\,1\,2} \end{array}$$

Рис. 1

4. Розріжте квадрат на тупокутні трикутники.

5. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{x+2014}$, якщо відомо, що $\frac{1}{x+2013}=2$.

6. Скільки існує добутків з 2014 послідовних цілих чисел, які приймають найменше можливе значення?

7. Скільки існує трицифрових чисел, в запису яких є принаймні одна парна цифра?

8. Розріжте круг на 9 частин, з яких 6 частин – однакові трикутники.

9. У математичній олімпіаді взяли участь хлопчики та дівчата у відношенні $4:3$. Диплом виборола 31 дитина, при цьому серед нагороджених виявилось 25% від усіх дівчат та 20% від усіх хлопців. Скільки дітей брали участь в олімпіаді?

10. Знайдіть усі натуральні n, для яких вираз $\left[\dfrac{n^2+n-5}{2}\right]$ є простим числом, де через $[a]$ позначено цілу частину числа a.

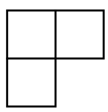


Рис. 2

11. В одноколовому футбольному турнірі приймали участь 6 команд. Команди набрали 12, 10, 8, 8, 3 і 1 очки відповідно (за перемогу команда одержує 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку – 0 очок). Скільки матчів в цьому турнірі закінчилися внічию?

12. Яку найбільшу кількість куточків, що складаються з трьох одиничних квадратиків (рис. 2) можна без накладань помістити в прямокутник 5×7? (Куточки можна повертати довільним чином).

13. У школі на останній дзвоник усім учням хочуть подарувати шоколадки, кожному по одній. Цього року можна закупити шоколадки або у коробках по 24 шоколадки, або у коробках по 20, але тоді коробок буде на 5 більше, ніж у першому випадку, і в обох випадках усі шоколадки будуть роздані. Скільки учнів навчається у школі?

14. На спортмайданчику стоять 2014 атлетів з номерами на майках 1, 2. ..., 2014. Через однакові проміжки часу тренер починає вигукувати послідовно усі натуральні числа від 1 до 2014. Усі атлети, чий номер має дільником проголошене число, в цей момент міняють своє положення: якщо він стояв – він присідає та навпаки, якщо сидів – встає. Скільки атлетів сидітимуть у момент, коли тренер вигукне останнє число 2014?

15. Яку найменшу кількість гир треба мати, щоб зважити на вагах будь-який вантаж від 1 г до 13 г (маси гир – натуральні числа і їх можна класти на обидві чашки вагів).

16. Знайдіть площу фігури, що зображена на рис. 3, де $OA=AB=1$.

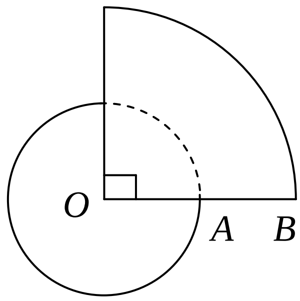


Рис. 3

17. Відношення швидкості пішохода до швидкості велосипедиста дорівнює $2:7$. Відомо, що пішохід проходить 4 км за 1 годину. Скільки кілометрів проїде велосипедист за 4 години?

18. Знайдіть найменше натуральне число, яке має такі властивості: воно має лише цифри 2, 4 та 8, кожна з цих цифр зустрічається принаймні двічі та воно не ділиться на 4.

19. У кімнаті Богдана 4 годинники, при цьому перший помиляється на 2 хв (помиляється – це означає, що поспішає або відстає), другий годинник помиляється на 3 хв, третій – на 4 хв, а четвертий – на 5 хв. У якийсь момент Богдан побачив, що показники годинників такі: 2:54, 2:57, 3:02 та 3:03 (але невідомо, де який годинник). Який в цей момент справжній час?

20. Розріжте квадрат 4×4 трьома відрізками однакової довжини на дві однакові частини, якщо початок розрізання знаходиться на стороні квадрату на відстані 1 від однієї з вершин?

```
 ДОСКА
+ДОСКА
 ДОСКА
 ─────
 ЛОДКА
```

Рис. 4

Наймолодша ліга. Заліковий рубіж

1. Було два прямолінійні шматки дроту. Від першого та другого відламали однакові за довжиною шматочки і виявилось, що після цього перший шматок став в 3 рази довший, ніж другий. Після цього ще раз відламали по такому самому шматочку і залишок першого дроту став у 4 рази довший ніж залишок другого. У скільки разів був довший перший дріт ніж другий з самого початку?

2. Знайти усі двоцифрові числа, будь-який натуральний степінь яких закінчується на дві цифри, що утворюють вихідне число.

3. Розв’яжіть ребус (рис. 4), де різним буквам відповідають різні цифри. У відповіді наведіть число, що дорівнює значенню суми $(ЛОДКА)$.

4. Сім точок ділять коло на 7 рівних дуг. Кожні дві точки з’єднали відрізком. Скільки утворилося рівнобедрених трикутників з вершинами у цих точках.

Трикутники, які відрізняються принаймні однією вершиною вважаються різними.

5. Знайдіть усі розв’язки такого ребусу: ****×***=*****1, де написано приклад добутку чотирицифрового числа на трицифрове, у відповіді вийшло шестицифрове число, при цьому під зірочкою може бути закодованою лише цифра 0 або 1. У відповіді наведіть праві частини усіх можливих варіантів.

6. У записі числа 2013 використано чотири послідовні цифри 0, 1, 2 та 3. Яке число стоїть перед 2013 у натуральному ряді, і також утворене з чотирьох послідовних цифр (не обов’язково це цифри 0, 1, 2 та 3)?

7. Задано 100 дійсних чисел. Відомо, що серед їх попарних добутків 2014 від’ємних. Скільки від’ємних чисел може бути серед заданих чисел. (Перелічити усі варіанти).

8. Є шоколадка, яка виглядає як квадрат 5×5, тобто складається із скріплених 25 одиничних квадратиків. Її можна розрізати лише по відрізках між одиничними квадратиками. Легко розрізати її на 5 цільних шматочків по 5 квадратиків так, щоб сумарна довжина розрізів дорівнювала 20. Розділіть плитку таким же чином, але щоб сумарна довжина розрізів була 16.

9. У деякому трицифровому числі поміняли місцями дві останні цифри та додали нове число до початкового. Вийшло чотирицифрове число, що починається з цифр 173. Якою може бути остання цифра цього числа?

10. Шість хлопців разом з’їли 20 цукерок, при цьому Андрій з’їв 1, Богдан – 2, а Вітя – 3 цукерки. Грицько з’їв цукерок більше ніж будь-хто інший. Скільки щонайменше з’їв цукерок Грицько?

11. Три спортсмени – Андрій, Богдан та Вадим прийняли участь у змаганні з бігу. Перед змаганням 4 експерти висловили свій прогноз: Перший – „переможе Андрій чи Богдан”; Другий – „Якщо Богдан прийде другим, то Вадим переможе”, Третій – „Якщо Богдан прийде третім, то Андрій не переможе”; Четвертий – „Або Богдан, або Вадим буде другим”. Виявилось, що усі експерти не помилились. В якому порядку фінішували спортсмени?

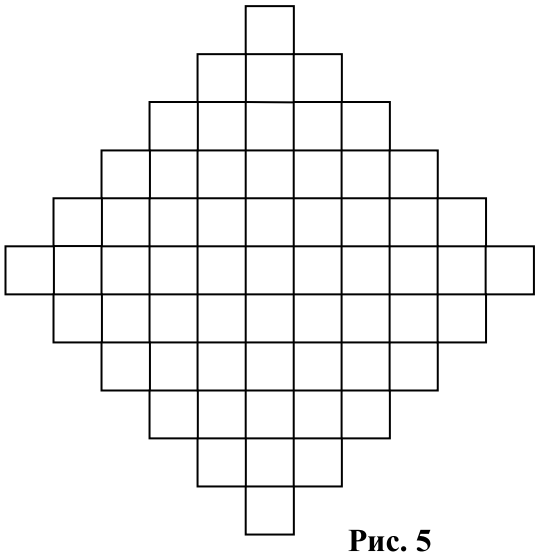


Рис. 5

12. Яку найбільшу кількість фігурок доміно, що складаються з двох одиничних квадратиків можна без накладань помістити у фігуру, що зображена на рис. 5?

13. Є ваги зі стрілкою, які можуть помилятися в той чи інший бік не більше ніж на 500 г. Андрійко поклав на ваги свій рюкзак і ваги показали 5 кг. Коли він ще поклав на ваги кілограмову гирю, то вони показали 7 кг. Скільки насправді важить рюкзак Андрійка?

14. Знайдіть усі трицифрові числа $\overline{abc}$, які не кратні 10 та задовольняють умову:

$$\overline{abc} = (a+b+c)^2 + 92a + 2b + c.$$

15. У книзі є 30 оповідань, усі вони мають різний обсяг: 1, 2, 3, ..., 30 сторінок відповідно (не обов’язково у вказаному порядку). Кожне оповідання починається з нової сторінки, перше оповідання розпочинається на першій сторінці. Яка найбільша кількість оповідань може розпочинатися на сторінці з непарним номером?

16. Квадрат розрізаний двома парами паралельних прямих, як це показане на рис. 6.

Відомо, що площа великого квадрату дорівнює 100, а площа сірого прямокутника дорівнює 40. Чому дорівнює площа чотирикутника $ABCD$?

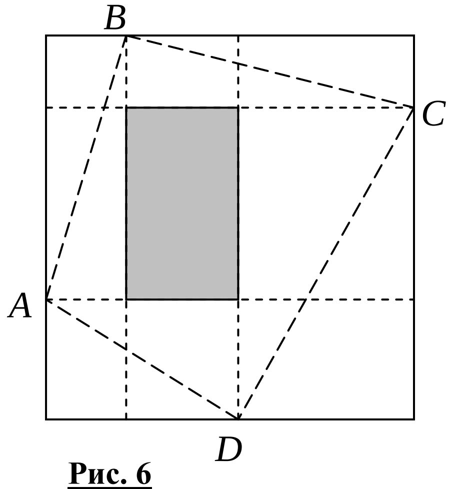


Рис. 6

17. Малюк та Карлсон беруть по черзі з пакету цукерки. Спочатку Малюк бере 1 цукерку, після цього Карлсон бере 2, далі Малюк бере 3 цукерки, а Карлсон – 4, далі Малюк бере 5 цукерок, а Карлсон 6 і так далі. Якщо наприкінці цукерок у пакеті залишилося менше, ніж має взяти Малюк чи Карлсон, то він забирає усі, що залишились. Скільки могло бути цукерок у пакеті, якщо Малюк отримав рівно 101 цукерку?

18. Знайдіть усі трійки натуральних чисел a, b, c, що задовольняють рівність:

$$a^2+b^2+c^2=2^9.$$

19. Квадрат 4×4 заповнений додатними числами, як це показане на рис. 7. Відомо, що добуток чисел у кожному рядку та у кожному стовпчику? однаковий. Яке число записане у комірці, де стоїть літера H ?

½	32	A	B
C	2	8	2
4	1	D	E
F	G	H	16

Рис. 7

20. Трикутник з якими кутами слід взяти, щоб можна було провести в ньому один відрізок таким чином, щоб серед трикутників на малюнку були такі: гострокутний, прямокутний, тупокутний, рівносторонній, рівнобедрений та різносторонній? Наведіть принаймні один приклад.

Молодша ліга. Вихідний рубіж

1. Задача № 1 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

2. Знайти усі натуральні n , для яких число $1\underbrace{44\ldots4}_{n}$ є квадратом натурального числа.

3. Задача № 3 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

4. Задача № 4 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

5. Відомо, що $a+b+c+d=4$ та $ab+ac+ad+bc+bd+cd=-7$. Чому може дорівнювати $a^2+b^2+c^2+d^2$?

6. Задача № 6 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

7. Задача № 7 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

8. В чотирикутнику $ABCD$ $\angle ABC=75°$, $\angle BCA=30°$ і $\angle CAD=50°$. Відомо, що $BC=AD$. Знайдіть $\angle ADC$.

9. Задача № 9 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

10. Квадрати послідовних натуральних чисел виписують один за одним: 149162536.... Яка цифра виявиться на 100-му місці?

11. Задача № 11 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

12. Якими можуть бути кути опуклого дванадцятикутника, якщо кожен з них кратний $30°$?

13. Є ваги зі стрілкою, які можуть помилятися в той чи інший бік не більше ніж на 500 г. Андрійко та Богдан поклали на ваги свої рюкзаки і ваги показали 5,5 кг. Коли на ваги поклали рюкзаки Богдана та Василя, вони показали 7 кг, а рюкзаки Андрія та Василя разом заважили 6 кг. Коли поклали одразу 3 рюкзаки, то ваги показали 8 кг. Скільки насправді важать рюкзаки кожної дитини?

14. Задача № 14 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

15. Задача № 15 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

16. Задача № 16 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

17. Двоє плавців одночасно починають плисти зі старту у 50 метровому басейні по своїх доріжках с постійними швидкостями. Допливши до кінця доріжки плавці миттєво розвертаються та пливуть назад, і так далі. Вперше вони зустрілися рівно на середині басейну, тобто на відстані 25 м від старту. На якій відстані від старту вони зустрінуться вдруге?

18. Знайдіть усі натуральні числа a, для яких число $(a^2+85)^2-(18a+3)^2$ є простим.

19. Яку найменшу кількість прямокутників 1×2 треба зафарбувати у сірий колір на шахівниці 8×8, щоб будь-який квадрат 2×2 цієї шахівниці мав принаймні одну сіру клітинку?

20. У трикутнику ABC проведена бісектриса CD. Виявилось, що центр кола вписаного в ΔBCD співпадає з центром описаного кола ΔABC. Знайдіть кути ΔABC.

Молодша ліга. Заліковий рубіж

1. Задача № 1 залікового рубежу наймолодшої ліги.

2. Задача № 2 залікового рубежу наймолодшої ліги.

3. Задача № 3 залікового рубежу наймолодшої ліги.

4. Задача № 4 залікового рубежу наймолодшої ліги.

5. Розв’яжіть рівняння:

$$\frac{x-2012}{2014}+\frac{x-2014}{2012}=\frac{2014}{x-2012}+\frac{2012}{x-2014}.$$

6. Задача № 6 залікового рубежу наймолодшої ліги.

7. Задача № 7 залікового рубежу наймолодшої ліги.

8. У трикутнику ABC бісектриса AE дорівнює відрізку EC. Знайдіть $\angle ABC$, якщо $AC=2AB$.

9. Задача № 9 залікового рубежу наймолодшої ліги.

10. Задача № 10 залікового рубежу наймолодшої ліги.

11. Скільки існує способів розбити прямокутник 2×8 на доміношки 1×2?

12. У трикутника ABC сторони утворюють послідовні цілі числа, а медіана AM перпендикулярна бісектрисі BL. Знайдіть довжину найбільшої сторони ΔABC.

13. Відомо, що для додатних чисел x, y, z справджується рівність $xyz=1$. Чому може дорівнювати значення виразу (вкажіть усі можливі відповіді):

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}?$$

14. Набір натуральних чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_{2015})$ називається „добрим”, якщо $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{2015}$, $a_1+a_2+\ldots+a_{2015}=4030$ та для кожного $k\in\{1, 2, \ldots, 2015\}$ сума будь-яких k чисел з набору не дорівнює 2015. Знайдіть усі добрі набори чисел.

15. Задача № 15 залікового рубежу наймолодшої ліги.

16. Задача № 16 залікового рубежу наймолодшої ліги.

17. Задача № 17 залікового рубежу наймолодшої ліги.
18. Яка найменша кількість студентів може бути на потоці, якщо відсоток дівчат там більше 43,5% та менше ніж 43,6%?
19. Задача № 19 залікового рубежу наймолодшої ліги.
20. Задача № 20 залікового рубежу наймолодшої ліги.

Середня ліга. Вихідний рубіж

1. Задача № 1 вихідного рубежу наймолодшої ліги.
2. Задача № 2 вихідного рубежу молодшої ліги.
3. Задача № 3 вихідного рубежу наймолодшої ліги.
4. У прямокутний ΔABC з катетами $AC = 3$ та $BC = 4$ вписано півколо, що має центр на катеті BC та дотикається двох інших сторін, як це показане на рис. 8. Чому дорівнює радіус цього півкола?

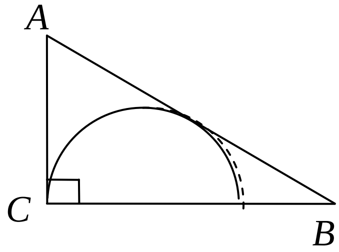


Рис. 8

5. Задача № 5 вихідного рубежу молодшої ліги.
6. З цифр 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8 та 9 складіть число, яке є шостим степенем деякого натурального числа.
7. Скільки існує натуральних чисел, яки не перевищують 1000, які не діляться ні на 3, ні на 5, ні на 7?
8. Задача № 8 вихідного рубежу молодшої ліги.
9. При яких a, b, c кожна з прямих $y = ax + b$, $y = bx + c$ та $y = cx + a$ проходить через точку $(1; 1)$?
10. Задача № 10 вихідного рубежу молодшої ліги.
11. Задача № 11 вихідного рубежу наймолодшої ліги.
12. Задача № 12 вихідного рубежу молодшої ліги.
13. Задача № 13 вихідного рубежу молодшої ліги.
14. Розв'яжіть у цілих числах $(x;\ y;\ z)$ систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy + z = 27, \\ x + yz = 22. \end{cases}$$

15. На шахівниці 21×21 стоять тури таким чином, що кожна знаходиться під ударом не більше як однієї з інших. Скільки максимум може стояти тур на усій шахівниці?
16. У колі проведені дві паралельні хорди довжиною 24 та 32, відстань між якими 14. Якою може бути площа цього кола?
17. Задача № 17 вихідного рубежу молодшої ліги.
18. Задача № 18 вихідного рубежу молодшої ліги.
19. Задача № 19 вихідного рубежу молодшої ліги.
20. Задача № 20 вихідного рубежу молодшої ліги.

Середня ліга. Заліковий рубіж

1. Усі числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2014}$ дорівнюють 0, 1 або -1. Яке найменше значення за таких умов може приймати вираз S:

$$S = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_{2014} + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{2013}x_{2014}.$$

2. Скільки існує чотирицифрових чисел, які діляться на 9 і складаються з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, в яких кожна цифра зустрічається не більше ніж один раз?

3. Задача № 3 залікового рубежу наймолодшої ліги.

4. У трапеції $ABCD$ з основами BC та AD діагоналі перетинаються в точці O. Крім того $CD = AO$, $BC = OD$ та діагональ CA є бісектрисою $\angle BCD$. Знайдіть у градусах величину $\angle ABC$.

5. Задача № 5 залікового рубежу молодшої ліги.

6. Знайти усі розв'язки в цілих числах рівняння:

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy.$$

7. У шаховому турнірі приймало участь втричі більше чоловіків, ніж жінок. Кожні двоє зіграли по одній партії. Чоловіки набрали в 1,2 рази більше очок, ніж жінки. Скільки було шахістів усього – чоловіків та жінок разом? Вкажіть усі можливі відповіді. За перемогу нараховується 1 очко, за нічию – ½, за поразку очок не нараховується.

8. Задача № 8 залікового рубежу молодшої ліги.

9. Знайдіть усі значення параметру p, при яких наведена система рівнянь має розв'язок:

$$\begin{cases} \sqrt{6-t} - \sqrt{5-t} = 1, \\ \sqrt{6-t} + \sqrt{5-t} = p. \end{cases}$$

10. Знайдіть кількість різних натуральних дільників у числа $6n$, якщо відомо, що у числа $2n$ їх 28, а у числа $3n$ – 30?

11. Задача № 11 залікового рубежу молодшої ліги.

12. Задача № 12 залікового рубежу молодшої ліги.

13. Нехай x_1, x_2 – дійсні розв'язки рівняння $x^2 + px + q = 0$. Знайдіть p, q, якщо відомо, що $x_1 + 1$, $x_2 + 1$ – є коренями рівняння $x^2 - p^2 x + pq = 0$.

14. Задача № 14 залікового рубежу молодшої ліги.

15. По колу записані $n \geq 3$ цілих чисел, сума яких дорівнює 94. Відомо, що будь-яке число дорівнює модулю різниці двох наступних за ним чисел. Які значення може приймати число n?

16. З шахівниці 8×8 вирізали кутовий одиничний квадратик. На яку найменшу кількість рівновеликих (тобто однакової площі) трикутників її тепер можна розрізати?

17. Задача № 17 залікового рубежу наймолодшої ліги.

18. Задача № 18 залікового рубежу молодшої ліги.

19. За круглим столом сидять 2014 людини серед яких є брехуни, які завжди кажуть неправду, та лицарі, які завжди кажуть правду. Кожний, із сидячих за столом, сказав: „У кожній трійці людей, які сидять поспіль, я бачу більше брехунів, ніж лицарів". Скільки могло за столом бути брехунів?

20. У трикутнику ABC провели висоту AD, M – середина сторони BC. Відомо, що $\angle BAD = \angle DAM = \angle MAC$. Знайдіть величини кутів ΔABC.

Старша ліга. Вихідний рубіж

1. Знайти найбільше натуральне число n, для якого система нерівностей $1 < x < 2$, $2 < x^2 < 3$, $3 < x^3 < 4$, …, $n < x^n < n+1$ має розв'язок.

2. Задача № 2 вихідного рубежу молодшої ліги.

3. Задача № 3 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

4. Задача № 4 вихідного рубежу середньої ліги.

5. Розв'яжіть рівняння: $x - x^2 + x^3 - x^6 = 2\sin\frac{x^2 - x}{2}\cos\frac{x^2 + x}{2}$.

6. Для яких тризначних чисел різниця між числом та сумою кубів його цифр приймає максимальне значення? У відповіді надайте значення цієї максимальної різниці.

7. Задача № 7 вихідного рубежу середньої ліги.

8. З точки O проведено 12 променів з кутами 30° між усіма сусідніми. На одному з них на відстані d від точки O взята точка A, з неї опущено перпендикуляр на сусідній проти годинникової стрілки промінь, з одержаної точки B (основи проведеного перпендикуляра) знову опущено перпендикуляр на сусідній проти годинникової стрілки промінь і т.д. до нескінченності. Знайти довжину L цієї нескінченної ламаної, що обертається навколо точки O.

9. Знайти усі значення параметру a, при яких рівняння $a|x| - |x-2| = 0$ має єдиний розв'язок.

10. Скінченна арифметична прогресія має однакові натуральні перший член та різницю. Скільки щонайбільше вона може мати членів, якщо їх сума 360?

11. На дошці 100×100 стоять N фішок, при яких виконується умова: жодні дві фішки не стоять у клітинах, які мають суміжну сторону, але якщо будь-яку з фішку зсунути у сусідню по стороні клітину, то ця умова порушиться. Яке мінімальне значення N можливе за таких умов?

12. У трикутнику ABC на стороні BC вибрана точка K так, що $\angle BAK = 24^\circ$. На відрізку AK вибрана точка M так, що $\angle ABM = 90^\circ$, $AM = 2BK$. Знайдіть градусну міру кута $\angle ABC$.

13. Знайдіть множину значень виразу $\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$, при умові, що x, y, z – додатні числа і $xyz = 1$.

14. Задача № 14 вихідного рубежу середньої ліги.

15. Задача № 15 вихідного рубежу середньої ліги.

16. Задача № 16 вихідного рубежу середньої ліги.

17. Кубічну параболу $y = x^3 - 2014x$ перетинають 2014 прямих, що паралельні прямій $y = x$, та мають по три точки перетину з кубічною параболою. Знайдіть суму абсцис усіх 6042–х точок перетину прямих та параболи.

18. Знайдіть найменше натуральне число N, для якого $N+1 \,\vdots\, 19$ та $N-1 \,\vdots\, 96$.

19. Задача № 19 вихідного рубежу молодшої ліги.

20. Задача № 20 вихідного рубежу молодшої ліги.

<u>Старша ліга. Заліковий рубіж</u>

1. Знайдіть усі значення параметру a, при яких задана система рівнянь має розв'язок:

$$\begin{cases} \frac{3xyz}{xy+xz+yz} = \sqrt[3]{xyz}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = a. \end{cases}$$

2. Задача № 2 залікового рубежу середньої ліги.

3. Задача № 3 залікового рубежу наймолодшої ліги.

4. Задача № 4 залікового рубежу середньої ліги.
5. Знайти усі значення параметру a , при яких наведена система рівнянь має рівно три розв’язки:

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3-14, \\ xyz=a. \end{cases}$$

6. Задача № 6 залікового рубежу середньої ліги.
7. Задача № 7 залікового рубежу середньої ліги.
8. Трикутник розташований на папері в клітинку зі стороною клітинок 1 таким чином, що усі його вершини знаходяться у вузлах сітки. Дві його сторони рівні $\sqrt{41}$ і $\sqrt{85}$ відповідно. Яку найбільшу площу може мати такий трикутник?
9. Задача № 9 залікового рубежу середньої ліги.
10. Задача № 10 залікового рубежу середньої ліги.
11. Задача № 11 залікового рубежу молодшої ліги.
12. Нехай $ABCD$ – опуклий чотирикутник одиничної площі, у якого $AD=BD$, $CD=BC$, $\angle ADB=20°$, $\angle BCD=100°$. Знайдіть $AC\cdot BD$.
13. Задача № 13 залікового рубежу середньої ліги.
14. Задача № 14 залікового рубежу молодшої ліги.
15. Задача № 15 залікового рубежу середньої ліги.
16. Задача № 16 залікового рубежу середньої ліги.
17. Знайдіть усі значення параметра a при яких рівняння

$$2|x-a|+3|x+a|=1$$

має принаймні один розв’язок.
18. Задача № 18 залікового рубежу молодшої ліги.
19. Задача № 19 залікового рубежу середньої ліги.
20. Задача № 20 залікового рубежу середньої ліги.

Розвязання задач

Наймолодша ліга. Вихідний рубіж

1. ***Відповідь***: 10.
Розв’язання. Нехай загальна вага улову M , маса більших трьох $-m_1=0,35M$. Тоді маса менших трьох дорівнює $m_2=\frac{5}{13}\cdot 0,65M=0,25M$. Таким чином – сім’ї дісталася риба вагою $m_3=0,4M$. Таким чином риб сім’я з’їла не менше 4-х. Бо не яки 3 з цих риб не повинні важити більше $m_1=0,35M$. Якщо сім’я з’їла 5 риб, то середня вага $\frac{0,4M}{5}=0,08M$, а середня вага риб, що з’їв кіт дорівнює $\frac{0,25M}{3}=\frac{M}{12}>0,08M$, що неможливо. Тим паче при більшій кількості риб. Тому сім’я з’їла 4 рибини, а загалом дід спіймав 10 рибин.

2. ***Відповідь:*** 12.
Розв’язання. Знайдемо таке найменше число – це $100\cdot 3=300$, найбільше – це $\frac{999}{3}=333$. Залишається зрозуміти, що вони повинні бути кратними 3, тому їх там $\frac{333-300}{3}+1=12$.

3. ***Відповідь:*** 83706.

***Розв'язання*.** Зрозуміло, що $E=1$ або $E=6$. Але при першому випадку маємо, що $2D=1$ або $2D=11$. Тому $E=6$. Тоді $D=0$ або $D=5$. Але для другого випадку $E+N+1=13$, звідки $N=E=6$, що суперечить умові. Тому $D=0$, $N=7$. Далі $E+O+1=10$, тому $O=3$. Тепер $W+R=2$ або $W+R=12$. Оскільки $W+R\geq 1+2=3$, то справджується тільки другий варіант. При цьому $T=1$. Оскільки цифри $3, 5, 6, 7$ зайняті, то залишається варіант $W=8$ та $R=4$, або навпаки. Найбільше значення $RONDE$ буде при $R=8$, відповідно $RONDE=83706$.

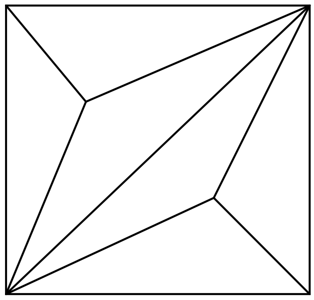


Рис. 9

4. ***Відповідь:*** Один з найпростіших варіантів показаний на рис. 9.

5. ***Відповідь*:** $\frac{2}{3}$.

***Розв'язання*.** З рівняння $x+2013=\frac{1}{2}$ маємо, що $x+2014=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$, тоді $\frac{1}{x+2014}=\frac{2}{3}$.

6. ***Відповідь*:** 2014.

***Розв'язання*.** Якщо усі числа додатні, то добуток – додатний, якщо усі числа від'ємні, то добуток – додатний. Таким чином найменше значення – це 0, це можливо за умови, що серед цих 2014 послідовних цілих чисел є 0. Неважко порахувати кількість таких наборів – перший з них такий $(-2013, -2012, \ldots, 0)$, останній – $(0, 1, \ldots, 2013)$. Тому таких наборів рівно 2014.

7. ***Відповідь:*** 775.

***Розв'язання*.** Трицифрових чисел без парних цифр рівно $5^3=125$, а тому від загальної кількості 900 трицифрових чисел треба відняти одержану кількість, а тому маємо таку відповідь:

$$900-125=775.$$

8. ***Відповідь*:** приклад показаний на рис. 10.

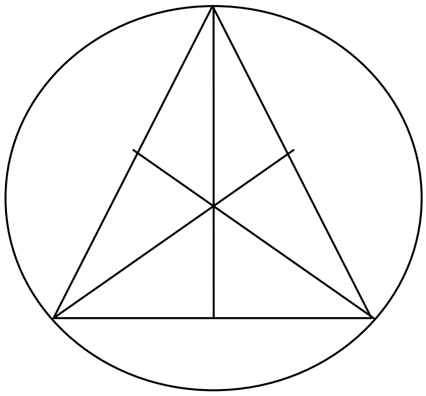


Рис. 10

9. ***Відповідь:*** 140.

***Розв'язання*.** Нехай хлопчиків було $4x$, тоді дівчат – $3x$. Нагородженими виявились $\frac{1}{5}\cdot 4x=\frac{4}{5}x$ хлопчиків та $\frac{1}{4}\cdot 3x=\frac{3}{4}x$ дівчат. Таким чином $\frac{4}{5}x+\frac{3}{4}x=31$ або $\frac{31}{20}x=31$. Звідси $x=20$, тому усього дітей брали участь в олімпіаді $7x=140$.

10. ***Відповідь:*** $n=3$ та $n=4$.

***Розв'язання*.** Оскільки число n^2+n-5 є непарним при будь якому значенні n, то $[\frac{n^2+n-5}{2}]=\frac{n^2+n-6}{2}=\frac{(n+3)(n-2)}{2}$. Це число може бути простим, якщо один з множників є 1, а інший – просте число. Тоді можливі такі варіанти:

$\frac{n-2}{2}=1$, тоді $n=4$ і вираз дорівнює 7 – просте число;

$\frac{n+3}{2}=1$, тоді $n<0$ і цей випадок неможливий;

$n-2=1$, тоді $n=3$ і вираз дорівнює 3 – просте число.

11. ***Відповідь*:** 3.

***Розв'язання*.** Якщо немає жодної нічиї, то разом усі команди зіграли 15 матчів, і набрали б 45 очок. Насправді команди набрали разом 42 очки. Таким чином було втрачено від максимуму 3 очки, оскільки при нічиї як раз втрачається рівно 1 очко, то загалом було рівно 3 нічиї.

12. ***Відповідь:*** 11.

***Розв'язання*.** З міркувань площі, прямокутник 5×7 має площу 35, тому може поміститись не більше 11 куточків, кожний з яких має площу 3. Процес заповнення 11 куточків нескладний і залишимо це читачам.

13. ***Відповідь:*** 600.
***Розв'язання*.** Запишемо таку рівність, яка випливає з умов задачі:
$$N = 20\cdot(n+5) = 24n \Rightarrow 4n = 100.$$
Таким чином $n = 25$, тому кількість учнів $N = 600$.

14. ***Відповідь:*** 44.
***Розв'язання*.** Зрозуміло, що будуть сидіти лише ті, у номеру яких непарна кількість дільників, а такими числами є лише квадрати натуральних чисел. Оскільки $44^2 = 1936 < 2014 < 45^2 = 2025$, то шуканих атлетів буде рівно 44.

15. ***Відповідь*:** 3.
***Розв'язання*.** Якщо взяти 2 гирі, то усього можна зважити щонайбільше 4 різних за вагою вантажі $(a \ge b)$:
$$a,\ b,\ a+b,\ a-b.$$
А 3 гир цілком вистачить: хай вони будуть $1, 3, 9$. Тоді можемо зважити такі вантажі:
$$1,\ 2=3-1,\ 3,\ 4=3+1,\ 5=9-3-1,\ 6=9-3,\ 7=9-3+1,$$
$$8=9-1,\ 9,\ 10=9+1,\ 11=9+3-1,\ 12=9+3,\ 13=9+3+1.$$

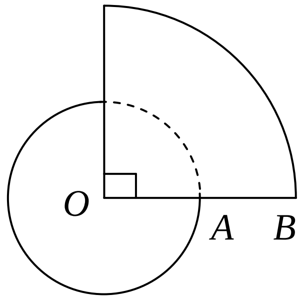


Рис. 11

16. ***Відповідь*:** $\frac{7}{4}\pi$.
***Розв'язання*.** Фігуру утворює ¾ від круга радіуса 1 та ¼ від круга радіуса 2 (рис. 11), тоді шукана площа дорівнює:
$$S = \tfrac{3}{4}\cdot\pi\cdot 1 + \tfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot 4 = \tfrac{7}{4}\pi.$$

17. ***Відповідь*:** 56 км.
***Розв'язання*.** Швидкість пішохода – 4 км/год, тому велосипедиста – 14 км/год. Таким чином він проїде за 4 години шлях у 56 км.

18. ***Відповідь:*** 244882.
***Розв'язання*.** Щоб число не ділилось на 4 воно повинно закінчуватись на 2, при цьому будь-яка з комбінацій 22, 42 та 82 умову задовольняє. Тепер вже неважко знайти шукане мінімальне число: 244882.

19. ***Відповідь*:** $2:59$.
***Розв'язання*.** Зрозуміло, що перші два показники на годинниках, що відстають, а останні два – поспішають. Різниця у показниках у 7 хв може бути, якщо 2:54 показує той, що відстає на 2 хв, а 3:03 – поспішає на 5 хв, або 3 хв та 4 хв, або на 4 хв та 3 хв, або на 5 хв та 2 хв відповідно. Розглянемо ці можливості.
Час 2:56 бути не може, бо час 2:57 стає неможливий.
Час 2:57 бути не може, бо час 2:57 стає неможливий.
Час 2:58 бути не може, бо час 2:57 стає неможливий.
Залишається варіант, що час 2:59, тоді усі вимоги задовольняються.

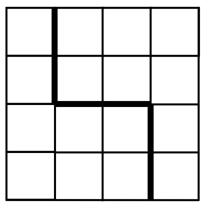


Рис. 12

20. ***Відповідь:*** розрізання показане на рис. 12.

Наймолодша ліга. Заліковий рубіж

1. ***Відповідь*:** у 2,5 рази.
***Розв'язання*.** Наприкінці залишок другого дроту нехай буде x, тоді першого – $4x$. Нехай в обох випадках відрізали шматки довжиною y. Тоді після першого відрізання виконується рівність

$3(x+y)=4x+y$. Звідси $x=2y$. Тоді з самого початку другий дріт мав довжину $x+2y=4y$, а перший – $4x+2y=10y$. Тому він був довший у 2,5 рази.

2. ***<u>Відповідь</u>*****:** $25,\ 76$.

<u>Розв'язання</u>**.** Для виконання умов задачі достатньо, щоб все це виконувалось для квадрата числа, тобто $N^2-N \vdots 100$, а тому $N(N-1) \vdots 100$. Оскільки ці множники взаємно прості, то або $N \vdots 4$ і $(N-1) \vdots 25$, або навпаки $N \vdots 25$ і $(N-1) \vdots 4$. Залишається розглянути числа, що кратні 25, при цьому число $(N \pm 1)$ повинно бути парним – $(24,\ 25)$ та $(75,\ 76)$.

3. ***<u>Відповідь</u>*****:** 89250.

<u>Розв'язання</u>**.** Буква $А$ може дорівнювати або 0, або 5. Якщо $А=0$, то $К=5$. Тепер подивимось на додавання цифр $О$. Воно не може бути ні 0, ні 5, тому утворене внаслідок переносу розряду. Тому остання цифра $3\cdot О$ повинна бути на 1 або на 2 менша від $О$, тоді при відповідному додавання з попереднього стовпчика може вийти цифра $О$. Подивимось, коли це можливо. Тільки при $4+4+4=12$ або $9+9+9=27$ (тоді треба, щоб при додаванні $С+С+С \geq 21$). Залишається зрозуміти, що $Д \leq 2$. Але тоді $С=7$ та $Д=2$. Звідси $О=9$, бо при $О=4$ одержимо, що $Л=7$, але ця цифра вже зайнята. Таким чином маємо, таку відповідь:

$$29750\cdot 3=89250.$$

Якщо $А=5$, то цифру для букви $К$ підібрати неможливо.

4. ***<u>Відповідь</u>*****:** 21.

<u>Розв'язання</u>**.** Якщо основою рівнобедреного трикутника є відрізок, що з'єднує найближчі точки, тоді існує один рівнобедрений трикутник (рис. 13). Оскільки таких сторін 7, то й трикутників рівно 7. Якщо основою є відрізок, що з'єднує вершини через одну, то такий рівнобедрений трикутник один, тому разом – 7. Якщо основа – найдовший з проведених відрізків, то такий трикутник 1. Так само ї буде 7. Разом – 21 рівнобедрений трикутник.

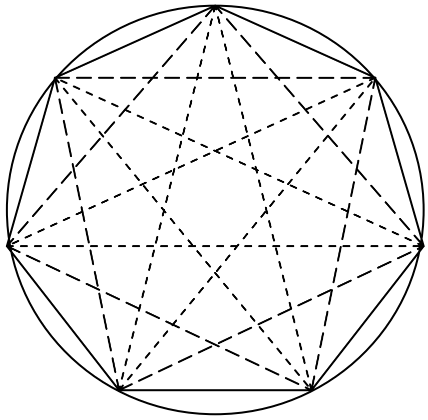


Рис. 13

5. ***<u>Відповідь</u>*****:** 101101 та 111111.

<u>Розв'язання</u>**.** Очевидно, що перші та останні цифри усіх чисел повинні бути 1. Таким чином маємо таку рівність: $1{*}{*}1\times1{*}1=1{*}{*}{*}{*}1$. Простою перевіркою неважко переконатись, що у першому (чотирицифровому) множнику не може бути більше цифр 1, бо інакше при додаванні у стовпчик у якомусь розряді виникне принаймні дві 1, тобто у сумі заборонена цифра. Навпаки ж, у другому множнику можливі обидва варіанти:

$1001\times101=101101$ та $1001\times111=111111$.

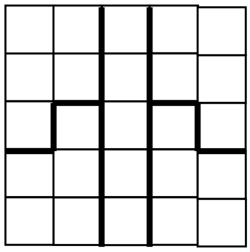


Рис. 14

6. ***<u>Відповідь</u>*****:** 1432.

<u>Розв'язання</u>**.** Оскільки число не може мати першою цифрою 2, то першою цифрою цього числа буде 1, тоді найбільші цифри, що йдуть поспіль будуть $1,\ 2,\ 3,\ 4$. Оскільки воно повинно розпочинатись з 1, то найбільше з них – 1432.

7. ***<u>Відповідь</u>*****:** $38;\ 53$.

<u>Розв'язання</u>**.** Нехай там a додатних чисел, b – від'ємних, решта – $100-a-b$ – нульові. Тоді умова задачі переписується так: $ab=2014$ та $a+b \leq 100$. Оскільки $2006=2\cdot19\cdot53$, то можливі варіанти такі:

$$a=38,\ b=53;\ a=53,\ b=38.$$

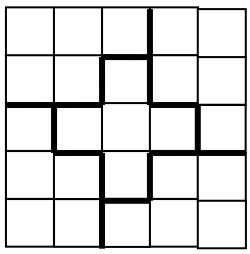


Рис. 15

8. ***<u>Відповідь:</u>*** Таких варіантів багато, наприклад, два з них наведені на рис. 14 та 15.

9. ***Відповідь:*** 2.

Розв'язання. Запишемо рівність: $100a+10b+c+100a+10c+b=1730+d$ або $200a+11(b+c)=1730+d$. Зрозуміло, що $0\le 11(b+c)\le 198$, тому $a=8$. Звідси $11(b+c)=130+d$. Звідси $130+d \,\vdots\, 11$. Єдина цифра, яка задовольняє цю умову $d=2$. Неважко зрозуміти, що таке число існує.

10. ***Відповідь***: 6.

Розв'язання. Якщо він з'їв 5 цукерок, то 5-й та 6-й хлопчики з'їли максимум по 4 цукерки, і разом усі шестеро максимум могли з'їсти 19. Таким чином Грицько мав з'їсти принаймні 6 цукерок. Що таке можливе просто показати прикладом.

Рез–т	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
АБВ	+	–		
АВБ	+	+	–	
БАВ	+	+	+	–
БВА	+	+	+	+
ВАБ	–			
ВБА	–			

рис. 16

11. ***Відповідь***: Богдан, Вадим та Андрій.

Розв'язання. Випишемо табличку усіх можливих результатів, та відповідно до цього перевіримо, чи справджується думка експертів (рис. 16). Плюс означає, що експерт не помилився, зрозуміло, що перевірку слід проводити рівно до першої помилки експерту при відповідному порядку спортсменів. Як бачимо можливий лише один порядок.

12. ***Відповідь:*** 25.

Розв'язання. Пофарбуємо квадратики у шаховому порядку так. щоб зовнішній шар був чорним. У ньому 20 квадратиків, тоді сусідній з ним білий шар містить 16, далі 12 чорних, 8 білих, 4 чорних та 1 білий. Таким чином разом маємо 36 чорних та 25 білих квадратики. Оскільки доміно закриває по одній білій та одній чорній клітині, то максимум можна покласти 25 доміно. Як це зробити – не важко показати безпосередньо.

13. ***Відповідь:*** $5{,}5$ кг.

Розв'язання. Нехай M – вага рюкзака, тоді з першого зважування маємо, що $4{,}5\le M\le 5{,}5$, а з другого: $6{,}5\le M+1\le 7{,}5$. Як бачимо єдине значення, що задовольняє обидві умови – це $M=5{,}5$.

14. ***Відповідь:*** 202 та 112.

Розв'язання. Розпишемо цю рівність:

$$100a+10b+c=(a+b+c)^2+92a+2b+c \Leftrightarrow 8(a+b)=(a+b+c)^2.$$

Позначимо $t=a+b\ge 1$, тоді остання рівність $8t=(t+c)^2$. Тоді з одного боку $8t>t^2$, звідки $t<8$. З іншого боку, $8t$ – точний квадрат. Зрозуміло, що це можливе лише при $t=2$. Таким чином, $t=a+b=2$. Це можливо для трицифрових чисел лише за умови $a=2, b=0$ або $a=b=1$. Тоді $16=(2+c)^2$, тобто $c=2$. Таким чином маємо дві відповіді: 202 та 112.

15. ***Відповідь***: 23.

Розв'язання. Розташуємо послідовно розміри оповідань. Тоді після оповідання з парною кількістю сторінок парність номеру наступного оповідання співпадає з попереднім, а після оповідання з непарною кількістю сторінок – змінюється. Тому принаймні 7 оповідань будуть розпочинатися з парної сторінки, бо усього маємо 15 оповідань з непарною кількістю сторінок. Наведемо приклад, що таке значення досягається. Спочатку йдуть усі оповідання з парною кількістю сторінок, вони усі розпочинаються з непарної сторінки. Далі усі оповідання з непарною кількістю, перше з них розпочнеться з непарної сторінки, друге – з парної, третє – знову з непарної і так далі. Загалом $15+8=23$ оповідання розпочнуться з непарної сторінки.

16. (148) ***Відповідь:*** 70.

Розв'язання. Неважко зрозуміти, що площа шуканого чотирикутника $ABCD$ складається з площі сірого прямокутника, та половини смуги між великим та сірим квадратами. Оскільки смуга має площу $100-40=60$, звідси площа $ABCD$ дорівнює $40+30=70$.

17. ***Відповідь:*** 211.

***Розв'язання*.** Подивимось, скільки міг одержати Малюк, якби цукерок було як завгодно багато:

$$1,\ 1+3=4,\ 1+3+5=9,\ 1+3+5+7=16,\ 1+3+5+7+9=25,\ 1+3+5+7+9+11=36,$$
$$1+3+5+7+9+11+13=49,\ 1+3+5+7+9+11+13+15=64,$$
$$1+3+5+7+9+11+13+15+17=81,\ 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100.$$

Таким чином, Малюк забрав останню цукерку, при цьому Карлсону дісталося $2+4+\ldots+20=110$ цукерок. Тому разом їх було 211.

18. ***Відповідь:*** таких трійок чисел не існує.

***Розв'язання*.** З умов задачі очевидно, що або усі вони парні, або одне парне, а інші два – непарні. У другому випадку ліва частина на 4 не ділиться, а права – ділиться. Одержана суперечність доводить, що $a=2a_1$, $b=2b_1$, $c=2c_1$. Тоді підставимо ці значення у початкову рівність і вона перепишеться у такому вигляді: $a_1^2+b_1^2+c_1^2=2^7$. Далі з аналогічних міркувань одержимо, що:

$$a_1=2a_2,\ b_1=2b_2,\ c_1=2c_2 \text{ та } a_2^2+b_2^2+c_2^2=2^5,$$
$$a_2=2a_3,\ b_2=2b_3,\ c_2=2c_3 \text{ та } a_3^2+b_3^2+c_3^2=2^3,$$
$$a_3=2a_4,\ b_3=2b_4,\ c_3=2c_4 \text{ та } a_4^2+b_4^2+c_4^2=2.$$

Останнє рівність очевидно неможлива для натуральних чисел $a_4,\ b_4,\ c_4$, що й доводить наведену відповідь.

19. ***Відповідь:*** $\frac{1}{4}$.

***Розв'язання*.** Перемножимо числа другого та четвертого рядків і прирівняємо це до добутку першого та другого стовпчиків:

$$C\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot F\cdot G\cdot H\cdot 16=\tfrac{1}{2}\cdot C\cdot 4\cdot F\cdot 32\cdot 2\cdot 1\cdot G.$$

Як бачимо тут усі невідомі скорочуються, і знаходимо, що $512H=128$. Неважко показати, що відповідні числа існують.

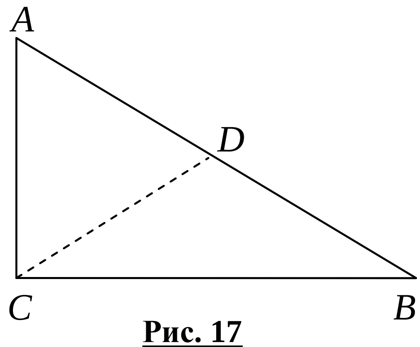


Рис. 17

20. ***Відповідь:*** $30°,\ 60°,\ 90°$.

***Розв'язання*.** Якщо у такому трикутнику провести медіану CD на гіпотенузу (рис. 17), то маємо, що ΔACD – рівносторонній та гострокутний, ΔCBD – рівнобедрений та тупокутний, ΔABC – різносторонній та прямокутний.

Молодша ліга. Вихідний рубіж

1. Задача № 1 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

2. ***Відповідь*:** $2;\ 3$.

***Розв'язання*.** Оскільки при $n\geq 2$ це число кратне 4, то після ділення на нього воно залишиться квадратом, таким чином $144\ldots4=361\ldots1\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$, що неможливо для квадрату, а тому це може бути можливо лише при $n\in\{1,2,3\}$. Перевіркою переконуємось, що підходить $2;\ 3$.

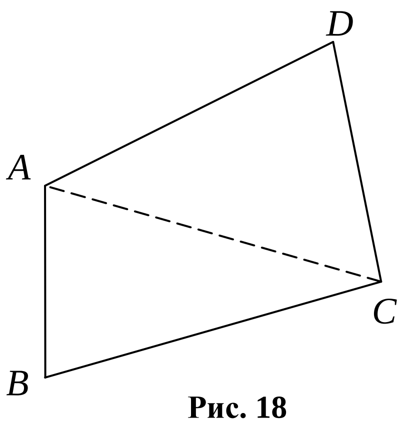


Рис. 18

3. Задача № 3 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

4. Задача № 4 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

5. ***Відповідь:*** 30.

***Розв'язання*.** З відомих рівностей маємо, що

$$a^2+...+d^2=(a+...+d)^2-2(ab+...+cd)=30.$$

6. Задача № 6 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

7. Задача № 7 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

8. ***Відповідь*:** $65°$.
Розв'язання. Оскільки відомі два кути в ΔABC, то знайдемо третій кут: $\angle BAC=75°$, тому цей трикутник рівнобедрений (рис. 18), звідси $AD=BC=AC$, тому ΔACD також рівнобедрений, звідси $\angle ADC=65°$.

9. Задача № 9 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

10. ***Відповідь*:** 9.
Розв'язання. Спочатку порахуємо скільки цифр мають різні квадрати.
Одноцифрових – 3, вони займають перші 3 цифри.
Оскільки $9<\sqrt{99}<10$, тому двоцифровими є квадрати чисел від 4 до 9, вони займають наступні 12 цифр.
Оскільки $31<\sqrt{99}<32$, тому трицифровими є квадрати чисел від 10 до 31, вони займають наступні 66 цифр.
Таким чином вже зайняті 81 цифра. Наступні квадрати чотирицифрові, з них треба взяти третю цифру п'ятого числа: 32, 33, 34, 35, $36^2=1296$.

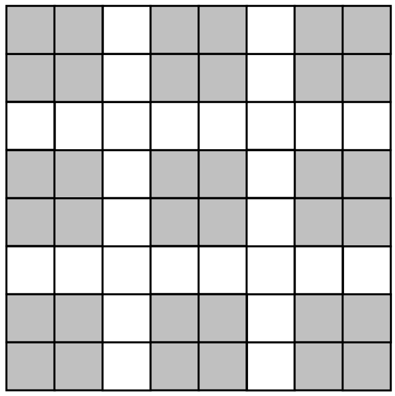


Рис. 19

11. Задача № 11 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

12. ***Відповідь:*** усі кути по $150°$.
***Розв'язання*.** Сума кутів такого багатокутника дорівнює $180°\cdot 10=1800°$. Середній кут тоді дорівнює $\frac{1800°}{12}=150°$. Якщо принаймні один кут менший від $150°$, то буде існувати кут і більший від $150°$, а тоді він не може бути кратним $30°$. Як висновок – усі кути по $150°$.

13. ***Відповідь:*** Андрій – 2 кг, Богдан – 3 кг, Василь – $3{,}5$ кг.
***Розв'язання*.** Позначимо справжні ваги рюкзаків Андрія, Богдана та Василя через $x,\ y,\ z$ відповідно. Тоді маємо такі нерівності:

$$5\le x+y\le 6,\ 6{,}5\le y+z\le 7{,}5,\ 5{,}5\le x+z\le 6{,}5,$$
$$7{,}5\le x+y+z\le 8{,}5.$$

Додамо три перші нерівності: $17\le 2(x+y+z)\le 20$ і порівняємо її з останньою: $15\le 2(x+y+z)\le 17$. Звідси $x+y+z=8{,}5$, при цьому, щоб це виконувалось, у кожному зважуванні повинні справджуватись ліві нерівності при попарному зважуванні. Таким чином:

$$x+y=5,\ y+z=6{,}5 \text{ та } x+z=5{,}5.$$

З урахуванням $x+y+z=8{,}5$ маємо, що $z=3{,}5$, $y=3$ та $x=2$.

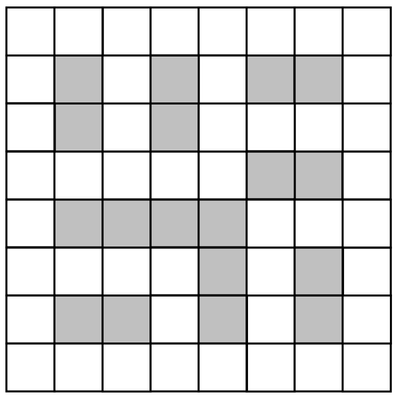


Рис. 20

14. Задача № 14 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

15. Задача № 15 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

16. Задача № 16 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

17. ***Відповідь:*** 50 м від старту.

Розв'язання. Зрозуміло, що коли більш швидкий зробить повний круг, тобто пропливе доріжку туди й назад, він обов'язково зустрінеться з партнером. Оскільки він більш швидкий, то це можливе, коли він проплив більше повної доріжки, а інший – менше. Таким чином повинна виконуватись умова: перший пропливе 75 м, а другий – 25 м. Неважко зрозуміти, що наступний раз вони зустрінуться як раз на відстані 50 м від старту, коли повільний пропливе наступні 25 м, а більш швидкий – 75 м.

18. ***Відповідь:*** $a=9$.
Розв'язання. Розкладемо вираз на множники. Тоді простим повинно бути таке число:

$$(a^2-18a+82)(a^2+18a+88).$$

Оскільки $a^2-18a+82<a^2+18a+88$, то вираз може бути простим лише за умови, коли водночас $a^2-18a+82=1$ та $a^2+18a+88$ -- просте. З першої умови маємо, що $a^2-18a+81=0$ звідки $a=9$. Тоді $a^2+18a+88=331$ -- просте число.

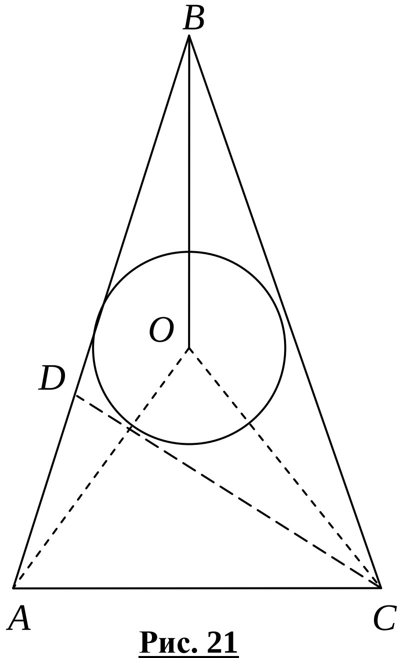


Рис. 21

19. ***Відповідь:*** 9.
Розв'язання. Якщо розглянути 9 квадратів 2×2, які є сірими на рис. 19, то бачимо, що ніякі два з них не перетинаються з одним прямокутником 1×2, тому треба зафарбувати принаймні 9 таких прямокутників. Як це зробити показане на рис. 20.

20. ***Відповідь:*** $\angle A=\angle C=72^\circ$, $\angle B=36^\circ$.
Розв'язання. Нехай O – центр вписаного кола ΔBCD, який так само є центром описаного кола ΔABC (рис. 21). Тоді BO, CO – бісектриси, та $AO=BO=CO$. Нехай $\angle ABO=\alpha$, тоді $\angle BAO=\angle BCO=\angle OCD=\alpha$, $\angle DCA=2\alpha$, $\angle OAC=\angle OCA=3\alpha$. Тому разом $10\alpha=180^\circ$, звідки $\angle A=\angle C=72^\circ$, $\angle B=36^\circ$.

Молодша ліга. Заліковий рубіж

1. Задача № 1 залікового рубежу наймолодшої ліги.

2. Задача № 2 залікового рубежу наймолодшої ліги.

3. Задача № 3 залікового рубежу наймолодшої ліги.

4. Задача № 4 залікового рубежу наймолодшої ліги.

5. ***Відповідь:*** 0; 4026; $\frac{2012^2+2014^2}{4026}=\frac{4052170}{2013}$.
Розв'язання. Приведемо до спільного знаменника ліву та праву частини:

$$\frac{2012x-2012^2+2014x-2014^2}{2014\cdot2012}=\frac{2014x-2014^2+2012x-2012^2}{(x-2012)(x-2014)}.$$

При рівності чисельників рівність можлива, коли:

- або рівні знаменники, при цьому вони відмінні від нуля;
- або чисельники дорівнюють нулеві і знаменники відмінні від нуля.

Для першого випадку маємо, що

$$(x-2012)(x-2014)=2012\cdot2014 \Leftrightarrow$$
$$x(x-4026)=0.$$

Звідси $x_1=0$, $x_2=4026$.

Для другого випадку: $4026x=2012^2+2014^2$, звідки

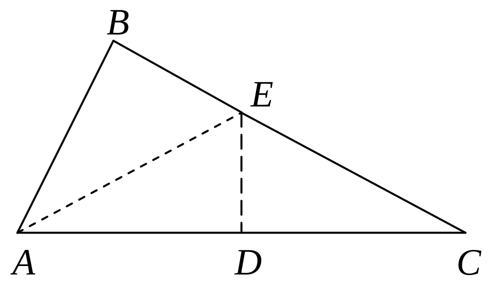


Рис. 22

$x_3 = \frac{2012^2 + 2014^2}{4026}$.

6. Задача № 6 залікового рубежу наймолодшої ліги.

7. Задача № 7 залікового рубежу наймолодшої ліги.

8. ***<u>Відповідь:</u>*** $90°$.
***<u>Розв'язання</u>*.** Оскільки ΔAEC рівнобедрений, то в ньому висота ED співпадає з медіаною. Тоді за умовою (рис. 22) $AD = AB$ і $\Delta ABE = \Delta ADE$. Тому $\angle ABE = \angle ADE = 90°$.

9. Задача № 9 залікового рубежу наймолодшої ліги.

10. Задача № 10 залікового рубежу наймолодшої ліги.

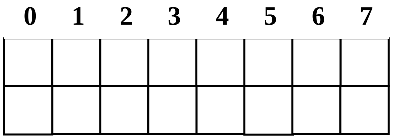
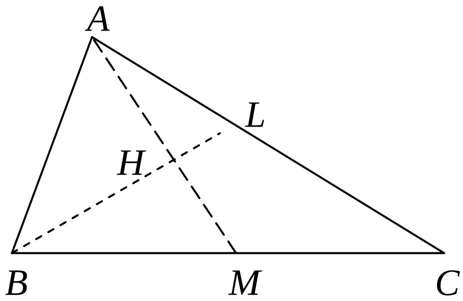


Рис. 23

11. ***<u>Відповідь</u>*:** 34.
***<u>Розв'язання</u>*.** Будемо вважати, що прямокутник 2×8 – горизонтальний. Тоді доміно будемо називати горизонтальними, якщо їх довша сторона горизонтальна та вертикальними інакше. Неважко зрозуміти, що усі горизонтальні доміно можуть бути розташованими лише по два, утворюючи квадрат 2×2. Інакше, з кожного боку залишиться непарна кількість квадратиків 1×1, які неможливо закрити доміно (рис. 23).
Розглянемо кількість таких квадратів 2×2.
Якщо їх 4 то варіант заповнення 1.
Якщо їх 3, то розглянемо можливі розташування двох лівих з них. Будемо їх позицію визначати за розташуванням правого верхнього квадратика 1×1, тоді усього є 7 позицій, як це показане на рис. 75. Зрозуміло, що позиції 0 не існує.
При розташуванні перших двох квадратів у позиціях 1+3 маємо для третього квадрату 2×2 3 варіанти розташування – 5, 6 та 7.
При розташуванні перших двох квадратів у позиціях 1+4 маємо для третього квадрату 2×2 2 варіанти розташування – 6 та 7.
При розташуванні перших двох квадратів у позиціях 1+5 маємо для третього квадрату 2×2 1 варіант розташування – у позиції 7.
Далі аналогічно, але без такого розписування маємо:
2+4 є 2 варіанти; 2+5 є 1 варіант; 3+5 також 1 варіант.
Усього 10 варіантів.
Якщо їх 2, то лівіший з них при попаданні у позиції 1 має 5 варіантів для другого, позиції 2 – 4 варіанти, і так далі, разом – 15 варіантів.
Якщо він 1, то маємо 7 варіант його розташування.
Якщо їх немає, то варіант заповнення 1.
Разом маємо: $1+10+15+7+1=34$ різних варіанти заповнення.



<u>Рис. 24</u>

12. ***<u>Відповідь:</u>*** 4.
***<u>Розв'язання</u>*.** Позначимо через $H = AM \bigcap BL$, тоді ΔABM – рівнобедрений, оскільки BH – бісектриса та висота цього трикутника (рис. 24). Тому $BM = AB = x$, звідки $BC = 2x$. Таким чином можливі такі варіанти.
$x=1$. Тоді дві сторони 1 та 2, третю підібрати неможливо.
$x=2$. Тоді дві сторони 2 та 4, тоді третя сторона повинна дорівнювати 3. І це розв'язання.
$x\ge3$. Тоді дві сторони x та $2x$, третю підібрати неможливо, бо між цими числами більше одного цілого числа.

13. ***<u>Відповідь:</u>*** 1.
***<u>Розв'язання</u>*.** Домножимо чисельник і знаменник другого дробу на x, а третього на xy, тоді:

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{xy}{xy+xyz+x^2yz}=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+1}+\frac{xy}{xy+1+x}=1.$$

14. ***Відповідь:*** $(2;\ 2;\ \dots;\ 2)$ та $(1;\ 1;\ \dots;\ 1;\ 1;\ 2016)$.

Розв'язання. Припустимо, що набір $(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{2015})$ – добрий, розглянемо такі суми:

$$a_1,\ a_1+a_2,\ \dots,\ a_1+a_2+\dots+a_{2014}.$$

Кожна з них лежить в межах від 0 до 4030 не включно. За умовою жодна із сум не дорівнює 2015, та окрім того, жодні дві суми не мають різницею 2015, бо тоді їх різниця – також деяка сукупність чисел набору – дорівнює 2015. Тому для деякого $k=\overline{1,\ 2014}$

$$a_2 \equiv a_1+a_2+\dots+a_k \pmod{2015}.$$

Якщо $k>1$, то будемо мати суперечність, бо різниця цих чисел дасть суму чисел, що дорівнює 2015. Тому $a_2 \equiv a_1 \pmod{2015}$. Звідси аналогічно маємо, що усі числа рівні за модулем 2015. Залишається з'ясувати, коли вони задовольняють умову, що їх сума дорівнює 4030.

Якщо $a_i \ge 3 \pmod{2015}$, то це не можливо.

При $a_i = 2 \pmod{2015}$, то можливий набір – це $(2;\ 2;\ \dots;\ 2)$.

При $a_i = 1 \pmod{2015}$, то можливий набір – це $(1;\ 1;\ \dots;\ 1;\ 1;\ 2016)$.

15. Задача № 15 залікового рубежу наймолодшої ліги.

16. Задача № 16 залікового рубежу наймолодшої ліги.

17. Задача № 17 залікового рубежу наймолодшої ліги.

18. ***Відповідь:*** 39.

Розв'язання. Нам треба знайти такі натуральні $p,\ q$, що $\frac{435}{1000}<\frac{p}{q}<\frac{436}{1000}$, при цьому q – мінімальне можливе. Перепишемо задану нерівність таким чином:

$$\frac{1000}{436}<\frac{q}{p}<\frac{1000}{435}.$$

Звідси зрозуміло, що $q=2p+r$, тоді маємо таку оцінку:

$$\frac{128}{436}<\frac{r}{p}<\frac{130}{435} \Leftrightarrow \frac{435}{130}<\frac{p}{r}<\frac{436}{128}.$$

Тоді $p=3r+x$ і відповідно:

$$\frac{45}{130}<\frac{x}{r}<\frac{52}{128} \Leftrightarrow \frac{128}{52}<\frac{r}{x}<\frac{130}{45}.$$

Далі аналогічно $r=2x+y$ і:

$$\frac{24}{52}<\frac{y}{x}<\frac{40}{45} \Leftrightarrow \frac{45}{40}<\frac{x}{y}<\frac{52}{24}.$$

Щоб значення q було якомога меншими, потрібно мінімізувати можливі значення інших змінних. Останню нерівність, очевидно, задовольняє число 2, тобто $x=2$ та $y=1$. Зрозуміло, що інші варіанти мають більші значення для $x,\ y$. Далі у зворотному напрямі знаходимо усі невідомі, які є найменшими з можливих:

$r=2x+y=5$, $p=3r+x=17$ та остаточно $q=2p+r=39$.

19. Задача № 19 залікового рубежу наймолодшої ліги.

20. Задача № 20 залікового рубежу наймолодшої ліги.

Середня ліга. Вихідний рубіж

1. Задача № 1 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

2. Задача № 2 вихідного рубежу молодшої ліги.

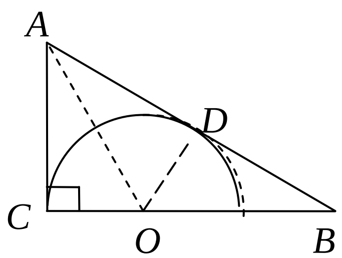


Рис. 25

3. Задача № 3 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

4. ***Відповідь***: $\frac{3}{2}$.

Розв'язання. Позначимо центр кола через O (рис. 25), тоді проведемо відрізок AO та перпендикуляр OD на гіпотенузу AB. Тоді маємо, що

$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2}ab = S_{ACO} + S_{AOB} = \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr, \text{ тому } r = \tfrac{ab}{b+c} = \tfrac{3\cdot 4}{3+5} = \tfrac{3}{2}.$$

5. Задача № 5 вихідного рубежу молодшої ліги.

6. ***Відповідь***: 387420489.

Розв'язання. Зрозуміло, що цей шостий степінь має у своєму записі 9 цифр. Тому шукане число n задовольняє умови:

$$100000000 \le n^6 \le 999999999 \text{ або } 22 \le n \le 31.$$

Далі треба або просто обчислити усі ці значення, або провести інші міркування. Подивимось на останні цифри шостих степенів:

$$0 \to 0,\ 1 \to 1,\ 2 \to 4,\ 3 \to 9,\ 4 \to 6,\ 5 \to 5,\ 6 \to 6,\ 7 \to 9,\ 8 \to 4,\ 9 \to 1.$$

Таким чином шуканими числами можуть бути лише 22, 23, 27 або 28. Оскільки сума цифр шостого степеня кратна 9, то й саме число повинно бути кратним 3, а це залишає єдиний варіант, який і є шуканим: $27^6 = 387420489$.

7. ***Відповідь***: 457.

Розв'язання. Чисел, що кратні n рівно $\left[\frac{1000}{n}\right]$, а тому за формулою включень-виключень, усього чисел, що діляться принаймні на одне з чисел 3, 5 чи 7 знаходиться за формулою:

$$N = \left[\tfrac{1000}{3}\right] + \left[\tfrac{1000}{5}\right] + \left[\tfrac{1000}{7}\right] - \left[\tfrac{1000}{15}\right] - \left[\tfrac{1000}{21}\right] - \left[\tfrac{1000}{35}\right] + \left[\tfrac{1000}{105}\right] =$$
$$= 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543,$$

тому шуканих чисел 457.

8. Задача № 8 вихідного рубежу молодшої ліги.

9. ***Відповідь:*** $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Оскільки з умови випливає, що $a + b = b + c = c + a = 1$. Звідси неважко знайти, що $a + b + c = \frac{3}{2}$, а далі вже остаточно знаходимо, що $a = b = c = \frac{1}{2}$.

10. Задача № 10 вихідного рубежу молодшої ліги.

11. Задача № 11 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

12. Задача № 12 вихідного рубежу молодшої ліги.

13. Задача № 13 вихідного рубежу молодшої ліги.

14. ***Відповідь:*** $(22;\ 0;\ 27)$, $(4;\ 6;\ 3)$.

Розв'язання. Якщо відняти ці рівняння, то матимемо, що

$$(x - z)(y - 1) = 5,$$

а якщо додати, то

$$(x + z)(y + 1) = 49.$$

Тепер переберемо можливі варіанти, оскільки числа, що задіяні – цілі. Почнемо з перебору дільників числа 5.

$y - 1 = -5 \Rightarrow y = -4$ та $y + 1 = -3$ – неможливо, бо це не є дільником числа 49.

$y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0$ та $y + 1 = 1 \Rightarrow x - z = -5$ та $x + z = 49 \Rightarrow x = 22$ та $z = 27$.

$y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2$ та $y + 1 = 3$ – неможливо, бо це не є дільником числа 49.

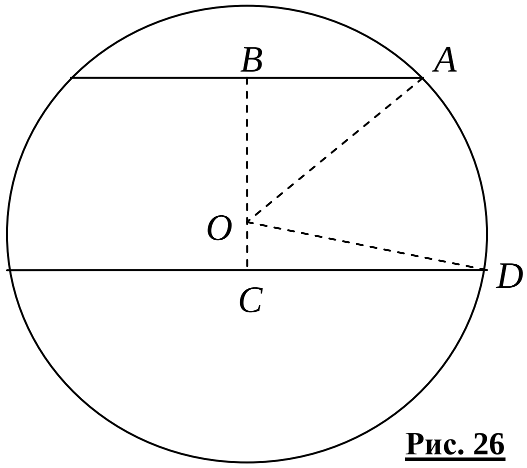
$y-1=5 \Rightarrow y=6$ та $y+1=7 \Rightarrow x-z=1$ та $x+z=7 \Rightarrow x=4$ та $z=3$.

15. ***<u>Відповідь</u>:*** 28.
<u>Розв'язання</u>**.** Назвемо лінією горизонталь чи вертикаль, у якій стоїть тура. Якщо дві тури атакують одна іншу, то вони займають 3 лінії, на яких більше немає тур. Якщо туру ніхто не атакує, то є дві лінії, де вона одна. Нехай кількість тур, що атаковані k пар, і окремих – m. Тоді усього тур $2k+m$ і вони замають $3k+2m$ ліній. Тоді $3k+2m \le 42$, звідси

$$2k+m \le 2k+\tfrac{4}{3}m=\tfrac{6k+4m}{3}=\tfrac{2}{3}(3k+2m) \le 28.$$

Залишається показати, що 28 тур поставити можна. Для цього достатньо виділити 7 квадратів 3×3, що йдуть по діагоналі і у кожному з них неважко поставити по 4 тури.

16. ***<u>Відповідь</u>:*** 265π.
<u>Розв'язання</u>**.** Розглянемо два випадки. Нехай B та C – середини цих хорд (рис. 26), тоді за умовою $BC=14$. Спочатку розглянемо випадок, коли центр кола O належить відрізку BC. Позначимо через $x=OC$, тоді $BO=14-x$. Нехай $r=OA=OD$. Тоді маємо рівності:



<u>Рис. 26</u>

$$r^2=BA^2+BO^2 \text{ та } r^2=CD^2+CO^2.$$

$$r^2=144+(14-x)^2=256+x^2 \Rightarrow x=3 \Rightarrow r^2=256+9=265.$$

Аналогічно у випадку коли точка C належить відрізку OB, тоді якщо $x=OC$, то $BO=14+x$. І аналогічні рівності призводять до суперечності:

$$r^2=144+(14+x)^2=256+x^2 \Rightarrow x<0.$$

17. Задача № 17 вихідного рубежу молодшої ліги.

18. Задача № 18 вихідного рубежу молодшої ліги.

19. Задача № 19 вихідного рубежу молодшої ліги.

20. Задача № 20 вихідного рубежу молодшої ліги.

<u>Середня ліга. Заліковий рубіж</u>

1. ***<u>Відповідь</u>:*** -1007.
<u>Розв'язання</u>**.** Зрозуміло, що справджується рівність:

$$2S=(x_1+x_2+\ldots+x_{2014})^2-(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_{2014}^2)=A-B,$$

тобто бажано одночасно мінімізувати A та максимізувати B. Зрозуміло, що мінімум $A=0$, коли кількість додатних змінних співпадає з кількістю від'ємних. При цьому максимум B, коли модулі усіх змінних дорівнюють 1. Обидві умови досягаються, наприклад, для набору:

$$x_1=x_2=\ldots=x_{1007}=-1,\ x_{1008}=x_{1009}=\ldots=x_{2014}=1.$$

Тоді найменше значення $2S=-2014$.

2. ***<u>Відповідь</u>*****:** 78.
<u>Розв'язання</u>**.** Спочатку треба знайти кількість розв'язків рівнянь $a+b+c+d=9$ та $a+b+c+d=18$ в цілих числах a, b, c, d за умови $0 \le a<b<c<d \le 6$.
Вибираємо дві менші цифри, а далі зрозуміло скільки розв'язків має рівняння, що має рівно дві невідомі.
Для першого рівняння:

$a=0,\ b=1$, – 2 розв'язки; $a=0,\ b=2$, – 1 розв'язок; далі при $a=0$ розв'язків немає.

$a\ge 1$ – розв'язків немає, оскільки $1+2+3+4=10>9$.

Для другого рівняння суму 18 має тільки чотири найбільші числа, а тому розв'язок єдиний.

Залишається порахувати загальну кількість чотирицифрових чисел, тобто на першому місці не може стояти 0.

Тому для перших трьох розв'язків усього різних чотирицифрових чисел буде по 18, а для останнього 24.

Тому разом розв'язків $18\cdot 3+24=78$.

3. Задача № 3 залікового рубежу наймолодшої ліги.

4. ***Відповідь:*** $126°$.

Розв'язання. Деякі з трикутників є рівнобедреними (рис. 27).

ΔADC – рівнобедрений, оскільки паралельні прямі AD та BC перетинаються прямою CA, що є бісектрисою $\angle BCD$.

ΔADO – рівнобедрений, оскільки $AO=CD=AD$.

ΔBCO – рівнобедрений, оскільки він подібний до ΔADO.

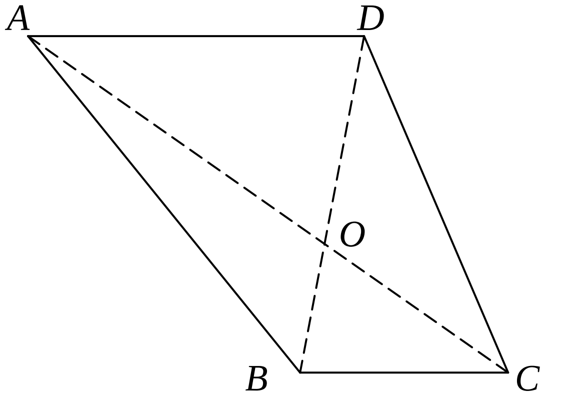


Рис. 27

ΔCDO – рівнобедрений, оскільки $DO=BC=CO$.

ΔBCD – рівнобедрений, оскільки він подібний до ΔBCO, тут $\angle BDC=\angle DCO=\angle OCB$, а також $\angle DBC$ – спільний.

ΔADB – рівнобедрений, оскільки $AD=CD=BD$.

Позначимо тепер $\angle ACB=\alpha$, $\angle CBD=\beta$. Тоді з ΔBCD маємо, що $2\alpha=\beta$. З ΔBCO маємо, що $180°=2\beta+\alpha=5\alpha$, тому $\alpha=36°$, $\beta=72°$. З ΔADB кут при вершині $\beta=72°$, а тому кути при основі дорівнюють $54°$. Далі остаточно маємо, що

$$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=126°.$$

5. Задача № 5 залікового рубежу молодшої ліги.

6. ***Відповідь***: $(0;\ 0)$, $(0;\ 3)$, $(3;\ 0)$ та $(2;\ 2)$.

Розв'язання. Якщо $(x,\ y)$ – розв'язок заданого рівняння, то вони також задовольняють умову:

$$|(x^2+y^2)(x+y-3)|=2|xy|.$$

Якщо $x+y-3=0$, то маємо. що або $x=0$, або $y=0$. Тоді маємо такі пари розв'язків: $(0;\ 3)$ та $(3;\ 0)$. Інакше $|x+y-3|\ge 1$, тому

$$2|xy|=|(x^2+y^2)(x+y-3)|\ge 2|xy|,$$

де остання рівність можлива лише за умови $|x|=|y|$ та $|x+y-3|=1$ або $x=y=0$. Пара $(0;\ 0)$ – розв'язок. Залишається розглянути інші можливості.

$x=y$, тоді $|2x-3|=1$ або $x=2$ чи $x=1$. Перевіркою переконуємось, що пара $(2;\ 2)$ є розв'язком, а $(1;\ 1)$ – не є.

$x=-y$, тоді $|-3|=1$, що неможливо.

7. ***Відповідь***: 12.

Розв'язання. Нехай жінок було n, а чоловіків – $3n$, при цьому чоловіки набрали M очок, а жінки – W. Тоді за умовою $M=\frac{6}{5}W$. Чоловіки мінімум могли набрати $\frac{3n(3n-1)}{2}$ очок, якщо вони програли усі зустрічі з жінками, а жінки максимум могли набрати $3n\cdot n+\frac{n(n-1)}{2}$ очок, якщо вони виграли усі зустрічі з чоловіками. Тому:

$$\frac{3n(3n-1)}{2}\le M=\frac{6}{5}W\le\frac{6}{5}\left(3n\cdot n+\frac{n(n-1)}{2}\right).$$

Далі маємо, що $15n(3n-1)\le 6(6n^2+n^2-n)$ або $3n^2\le 9n$, тобто $n\le 3$. Залишається розглянути тільки ці випадки.
$n=1$, тоді усього очок 6. Звідси $M=\frac{6}{5}W$ та $M+W=6$. Тоді $\frac{11}{5}W=6$ і $W=\frac{30}{11}$, що неможливо.
$n=2$, тоді усього очок 28. Звідси $M=\frac{6}{5}W$ та $M+W=28$. Тоді $\frac{11}{5}W=28$ і $W=\frac{140}{11}$, що також неможливо.
$n=3$, тоді усього очок 66. Звідси $M=\frac{6}{5}W$ та $M+W=66$. Тоді $\frac{11}{5}W=66$ і $W=30$, що можливо. Якщо 3 жінки виграли усі партії проти 9 чоловіків.

8. Задача № 8 залікового рубежу молодшої ліги.

9. ***Відповідь*:** $p=1$.

***Розв'язання*.** Позначимо через $a=\sqrt{6-t}$, $b=\sqrt{5-t}$, тоді $a^2-b^2=1$. Рівняння системи переписуються таким чином $a-b=1$ та $a+b=p$. Звідси $p=1$. Залишається переконатись, що при такому значенні p система має розв'язок $t=5$.

10. ***Відповідь*:** 35.

***Розв'язання*.** Нехай число $n=2^a3^bm$, при цьому число m має M дільників. Тоді у числа $2n=2^{a+1}3^bm$ буде $(a+2)(b+1)M=28$ дільників, а у числа $3n=2^a3^{b+1}m$ буде $(a+1)(b+2)M=30$. Виходячи з розкладу на множники чисел $28=4\cdot 7$ та $30=5\cdot 6$. Тоді $M\ne 7$, тому $a+2=7$, $a+1=6$. Тоді маємо, що $(b+1)M=4$ та $(b+2)M=5$. Звідси $M=1$, тобто $m=1$ та $b=3$. Таким чином $n=2^5\cdot 3^3$ і число $6n=2^6\cdot 3^4$, яке має $(6+1)(4+1)=35$ дільників.

11. Задача № 11 залікового рубежу молодшої ліги.

12. Задача № 12 залікового рубежу молодшої ліги.

13. ***Відповідь*:** $p_1=1$, $q\le\frac{1}{4}$ та $p_2=-2$, $q=-1$.
***Розв'язання*.** Запишемо теорему Вієта для обох рівнянь:
$$x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=q,\ x_1+x_2+2=p^2,\ (x_1+1)(x_2+1)=pq.$$
З першого та третього маємо: $p^2+p-2=0$ і $p_1=1$, $p_2=-2$. З другого та четвертого рівнянь маємо, що $q-p+1=pq$. Розглянемо випадки.
$p_1=1$, тоді будь-яке дійсне q задовольняє умови, але треба перевірити на існування дійсних коренів цих рівнянь: $1-4q\ge 0$, звідки $q\le\frac{1}{4}$.
$p_2=-2$, тоді $q+3=-2q$, звідки $q=-1$. Перевіркою переконуємось, що корені – дійсні.

14. Задача № 14 залікового рубежу молодшої ліги.

15. ***Відповідь:*** $n=141$ або $n=3$.
***Розв'язання*.** Зрозуміло, що усі число невід'ємні, нехай a – найбільше з них, b, c йдуть за ним. Тоді $a=|b-c|$, тобто одне з них повинно бути 0, а інше a. Тоді неважко зрозуміти, що числа по колу йдуть такими трійками: $a, a, 0, a, a, 0, \ldots, a, a, 0$. Тобто їх сума $\frac{2a}{3}n=94$ або $an=141$. Оскільки $n=3m$, то $am=47$ – просте число. Тому $m=47$ або $m=1$, звідки $n=141$ або $n=3$.

16. ***Відповідь:*** 18.

***Розв'язання*.** Розглянемо одиничний відрізок AB того відрізаного одиничного квадратику. Принаймні у одного з трикутників розбиття MNK одна із сторін повинна лежати на цьому відрізку. Якщо ця сторона $MN \subset AB$ (рис. 28), то висота до цієї сторони не перевищує 7, а тому й $S_{MNK} \le \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 = \frac{7}{2}$. Якщо такої сторони не існує, тобто вона виходить за межі відрізку AB, то тепер розглянемо відрізок BC. Тепер обов'язково існує рівновеликий трикутник розбиття MNK, у якого $MN \subset BC$, тоді вже для нього з аналогічних міркувань маємо, що $S_{MNK} \le \frac{7}{2}$.
Оскільки усі трикутники рівновеликі, та площа усієї дошки – 63, то таких трикутників повинно бути не менше $63 : \frac{7}{2} = 18$. Приклад з 18 трикутників неважко побудувати – кожен з восьми прямокутник 1×7 (більша сторона горизонтальна) лівіше від відрізку AB ділимо навпіл по діагоналі. Вийде 16 трикутників, і далі аналогічно ділимо навпіл прямокутник 7×1 зі стороною BC ще на два таких трикутники.

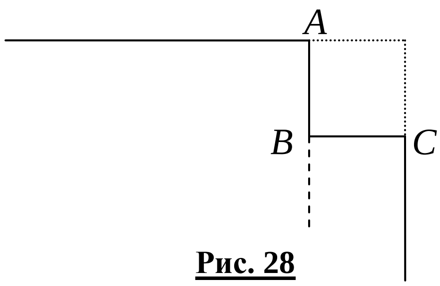


Рис. 28

17. Задача № 17 залікового рубежу наймолодшої ліги.

18. Задача № 18 залікового рубежу молодшої ліги.

19. ***Відповідь:*** 2012.
***Розв'язання*.** По-перше, там повинні бути принаймні 2 лицарі, які сидять в одній трійці сусідніх. Якщо таких немає, то розглянемо висловлювання брехуна. Він каже, що в усіх трійках більше брехунів, щоб воно стало брехливим, повинна існувати трійка, в якій це не так, тобто більше лицарів. Якщо їх там усі 3, то крайні з них, дивлячись на трійку з двома своїми сусідами, він збрехав би. Якщо їх загалом більше 3-х, то взяти того лицаря, що не знаходиться у цій трійці, то він – збрехав. Таким чином лицарів там рівно 2. Решта брехуни.

20. ***Відповідь:*** $30°, 60°, 90°$.
***Розв'язання*.** З умов задачі випливає (рис. 29), що $\Delta ABD = \Delta AMD$, тому $2MD = BM = MC$. Оскільки AM – бісектриса ΔADC, то $\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{MC} = \frac{1}{2}$, звідси $\cos\angle DAC = \frac{1}{2}$, тому $\angle DAC = 60°$, звідси вже очевидні і інші кути трикутника.

Старша ліга. Вихідний рубіж

1. ***Відповідь*:** 4.
***Розв'язання*.** Проста перевірка показує, що
$$(1,2) \cap \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) \cap \left(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}\right) \cap \left(\sqrt[4]{4}, \sqrt[4]{5}\right) = \left(\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}\right).$$
Покажемо, що наступний проміжок $\left(\sqrt[5]{5}, \sqrt[5]{6}\right)$ дає порожній перетин. Це випливає з простої нерівності: $\sqrt[5]{6} < \sqrt[3]{3} \quad \Leftrightarrow \quad 6^3 = 216 < 243 = 3^5$. Таким чином відповідь 4.

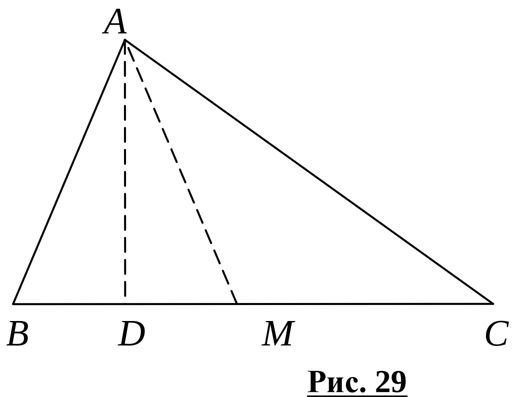


Рис. 29

2. Задача № 2 вихідного рубежу молодшої ліги.

3. Задача № 3 вихідного рубежу наймолодшої ліги.

4. Задача № 4 вихідного рубежу середньої ліги.

5. ***Відповідь*:** $\{0; 1\}$.

***Розв'язання*.** Перепишемо рівняння у такому вигляді: $f(x) = f(x^2)$, де $f(x) = x + x^3 + \sin x$, оскільки $f'(x) = 1 + 3x^2 + \cos x > 0$, то f – зростаюча, а тому вказана рівність можлива лише при умові $x = x^2$, звідки й маємо такий розв'язок: $\{0; 1\}$.

6. ***Відповідь*:** 396.

***Розв'язання*.** Маємо $100a+10b+c-a^3-b^3-c^3$. Далі просто знаходимо шуканий максимум для кожної з трьох цифр.

$f(a)=100a-a^3$, $1\le a\le 9$, $f'(a)=100-3a^2=0$, $a=\pm\frac{10\sqrt{3}}{3}$. Зрозуміло, що точкою максимуму є $a=\frac{10\sqrt{3}}{3}$, оскільки $5<\frac{10\sqrt{3}}{3}<6$, то найбільше значення може бути при $a=5$ або $a=6$. Оскільки $f(5)=375$ та $f(6)=384$, то шукане значення $a=6$.

$g(b)=10b-b^3, 0\le b\le 9$, $g'(b)=10-3b^2=0$, $b=\pm\frac{\sqrt{30}}{3}$. Далі аналогічно для точки максимуму маємо $1<\frac{\sqrt{30}}{3}<2$. Оскільки $g(1)=9$ та $g(2)=12$, то шукане значення $b=2$.

Оскільки для цифр $c-c^3\le 0$, то шукані значення останньої цифри $c=0$ та $c=1$.

Для будь-якого з цих чисел знаходимо, що шукана різниця дорівнює: $620-216-8=396$.

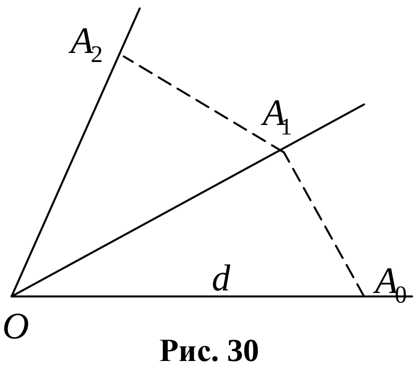


Рис. 30

7. Задача № 7 вихідного рубежу середньої ліги.

8. ***Відповідь*:** $\frac{\frac{1}{2}d}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{d}{2-\sqrt{3}}$.

***Розв'язання*.** Оскільки $OA_0=d$, то $A_0A_1=OA_0\sin 30°=\frac{1}{2}d$ (рис. 30). Далі $OA_1=OA_0\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}d$ і $A_1A_2=OA_1\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}d\cdot\frac{1}{2}$, аналогічно для кожного натурального k маємо, що $OA_{k+1}=OA_k\cos 30°=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k d$ та $A_kA_{k+1}=OA_{k+1}\sin 30°=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k d\cdot\frac{1}{2}$. Таким чином

$$L=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_kA_{k+1}+\ldots=\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}d\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\ldots+\frac{1}{2}d\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k+\ldots=\frac{\frac{1}{2}d}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{d}{2-\sqrt{3}}$$

9. ***Відповідь*:** $a=0$ та $a=1$.

***Розв'язання*.** Перепишемо рівняння у вигляді $a|x|=|x-2|$. Якщо нарисувати ескіз графіків цих функцій, будемо мати таку картинку (рис. 31).

Зрозуміло, що при $a<0$ розв'язків немає, при $a=0$ – єдиний розв'язок.

При $a=1$ так само розв'язок єдиний. При усіх інших додатних a – два розв'язки.

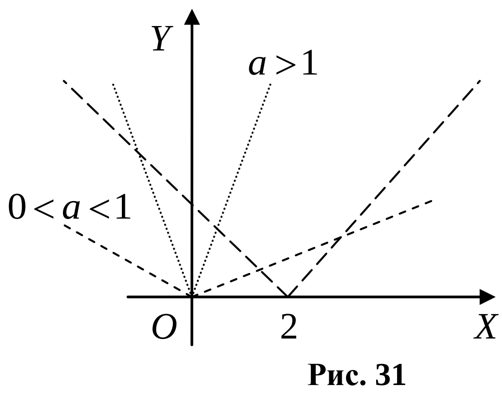


Рис. 31

10. ***Відповідь*:** 15.

***Розв'язання*.** Позначимо перший член та різницю через d, кількість членів – n, тоді маємо рівність:

$$\frac{2d+(n-1)d}{2}n=360 \text{ або } (n+1)nd=720.$$

Таким чином треба знайти найбільше натуральне n, що задовольняє останню рівність. Оскільки $720=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$, то далі просто можна підібрати з таких міркувань. Ці числа різної парності. Випишемо усі непарні дільники: $3, 5, 9, 15, 45$. Залишається підібрати відповідні парні дільники з можливих, як відрізняються від записаних чисел по модулю на 1 і вибрати серед них найбільше. $44, 46$ – умову не задовольняють. Тому шукане число 16. Таким чином $n=15$, $n+1=16$, та $d=3$.

11. ***Відповідь:*** 100.

***Розв'язання*.** Приклад, що така розстановка існує очевидний, достатньо поставити усі фішки вздовж діагоналі.

Покажемо, що менша кількість умову не задовольняє. Нехай фішок не більше 99. Тоді є порожній стовпчик. Подивимось на дві частини дошки, на які він розбив усю дошку. В одній з них знаходиться не більше 49 фішок. Але це означає, що там є два порожні рядки. Вибираємо найближчу до цих рядків фішку і можемо її зсунути на сусідню клітину. Якщо там немає жодної фішки, то достатньо зсунути фішку, що найближча до порожньої зони і її рухаємо.

12. *Відповідь:* $\angle ABC = 108°$.

***Розв'язання*.** Нехай точка F – середина AM, тоді $BF = \frac{1}{2}AM = BK$, $\angle BFM = 48° = \angle BKM$ (рис. 32). Звідси $\angle BAK + \angle BKA = 72°$.

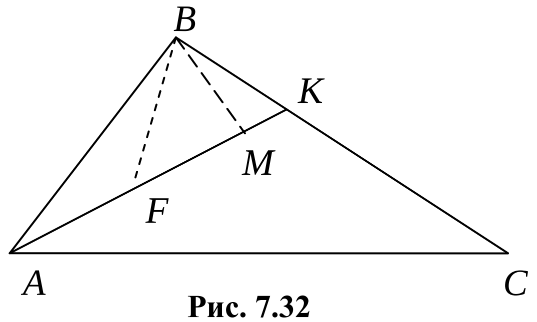


Рис. 7.32

13. *Відповідь*: $(0; +\infty)$.

***Розв'язання*.** Очевидно, що значення виразу додатне. Покладемо $x = t^2$, $y = z = \frac{1}{t}$, тоді $xyz = 1$, а значення

$$F = \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} = \frac{2t + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{2}{t}} = \frac{2t^3 + 1}{t^4 + 2t}.$$

Зрозуміло, що ця функція неперервна при додатних t, а оскільки

$$\lim_{t \to +0} F(t) = +\infty \text{ та } \lim_{t \to +\infty} F(t) = 0,$$

то множиною значень є весь проміжок $(0; +\infty)$.

14. Задача № 14 вихідного рубежу середньої ліги.

15. Задача № 15 вихідного рубежу середньої ліги.

16. Задача № 16 вихідного рубежу середньої ліги.

17. *Відповідь*: 0.

***Розв'язання*.** Розглянемо деяку пряму із цих 2014, нехай вона має рівняння $y = x + b$, тоді абсциси точок перетину задовольняють рівнянню: $x^3 - 2014x = x + b$. Позначимо ці абсциси x_1, x_2, x_3, тоді вони з теореми Вієта задовольняють умову: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, тому сума абсцис усіх 6042 тороч перетину дорівнює 0.

18. *Відповідь:* 1633.

***Розв'язання*.** З умови випливає, що $N + 1 = 19m$ та $N - 1 = 96n$. Звідси $96n + 2 = 19m$, звідси $5 \cdot 19n + (n + 2) = 19m$. Тому найменше натуральне n, що задовольняє цю рівність – це $n = 17$. Звідси й знаходимо шукане $N = 1633$.

19. Задача № 19 вихідного рубежу молодшої ліги.

20. Задача № 20 вихідного рубежу молодшої ліги.

Старша ліга. Заліковий рубіж

1. *Відповідь*: 6.

***Розв'язання*.** З другого рівняння маємо, що x, y, z – додатні, перше рівняння вказує на рівність середнього гармонічного та середнього геометричного цих чисел, тому вони рівні і з другого рівняння маємо, що $x = y = z = 1$, далі з третього рівняння маємо шукану відповідь: при $a = 6$ маємо розв'язок $(1; 1; 1)$, інакше – немає розв'язків.

2. Задача № 2 залікового рубежу середньої ліги.

3. Задача № 3 залікового рубежу наймолодшої ліги.

4. Задача № 4 залікового рубежу середньої ліги.

5. ***<u>Відповідь</u>*:** $a = 3$.
***<u>Розв'язання</u>*.** Оскільки система симетрична відносно трьох змінних, то вона має рівно три розв'язки при умові рівності двох з цих трьох змінних та нерівності третій. Нехай $x = z \neq y$, тоді з перших двох рівнянь маємо:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 2x^3 + y^3 - 14 \end{cases} \Rightarrow y = 1 - 2x \Rightarrow 6x^3 - 6x^2 + 2x + 14 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Далі просто знайдемо решту невідомих: $z = -1,\ y = 3$, та знаходимо шукане значення параметру $a = 3$.

6. Задача № 6 залікового рубежу середньої ліги.

7. Задача № 7 залікового рубежу середньої ліги.

8. ***<u>Відповідь</u>*:** $\frac{59}{2}$.
***<u>Розв'язання</u>*.** Не важко зрозуміти, що можна паралельно перенести трикутник таким чином, щоб вершина, з якої виходять задані сторони, попала в початок координат. Тоді нехай дві інші вершини цього ΔOAB будуть мати такі координати $A(a_1, a_2)$ та $B(b_1, b_2)$. Тоді $a_1^2 + a_2^2 = 41$ та $b_1^2 + b_2^2 = 85$. Тоді підбором неважко знайти, що $|a_1| = 4$, $|a_2| = 5$, або $|a_1| = 5$, $|a_2| = 4$. Так само $|b_1| = 6$, $|b_2| = 7$, або $|b_1| = 7$, $|b_2| = 6$. Будемо вважати, що $A(-4; 5)$. Оскільки площа трикутника – це півдобуток сторін на синус кута між ними, то треба знайти розташування точки B, при якому синус кута між OA та OB буде найбільшим, а це означає, що кут якомога близький до прямого. Це означає, що модуль косинуса найближчий до нуля. Косинус легко знайти через вектори. Обчислимо значення

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos\gamma = \sqrt{41 \cdot 85} \cdot \cos\gamma = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Щоб значення $a_1 b_1 + a_2 b_2$ було ближчим до нуля, треба, щоб обидві координати B були додатними (або від'ємними). Тоді:

$$b_1 = 6,\ b_2 = 7,\ a_1 b_1 + a_2 b_2 = 11 \text{ або } b_1 = 7,\ b_2 = 6,\ a_1 b_1 + a_2 b_2 = 2.$$

Таким чином $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{3485}}$, звідси $\sin\gamma = \frac{59}{\sqrt{3485}}$, тоді $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3485} \cdot \frac{59}{\sqrt{3485}} = \frac{59}{2}$.

9. Задача № 9 залікового рубежу середньої ліги.

10. Задача № 10 залікового рубежу середньої ліги.

11. Задача № 11 залікового рубежу молодшої ліги.

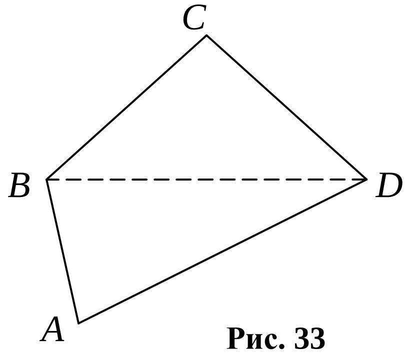


Рис. 33

12. ***<u>Відповідь</u>*:** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
***<u>Розв'язання</u>*.** Порахуємо кути, оскільки ΔABD – рівнобедрений (рис. 33), то $\angle DAB = \angle ABD = 80°$, аналогічно з ΔBCD маємо, що $\angle CBD = \angle CDB = 40°$. Тоді $\angle BCD + \angle BAD = 180°$, а тому цей чотирикутник вписаний. Тому з теореми Птоломея маємо, що

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Обчислимо площу чотирикутника, з урахуванням того, що $\sin\angle ABC = \sin\angle CDA = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тоді

$$1 = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(AB \cdot BC + CD \cdot AD) = \frac{\sqrt{3}}{4}(AB \cdot CD + BC \cdot AD),$$

звідки й знаходимо, що $AB \cdot CD + AD \cdot BC = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Або просто скористаємось формулою для площі чотирикутника $1 = S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle COD$, де O -- точка перетину діагоналей чотирикутника. Неважко підрахувати, користуючись вписаністю $ABCD$, що $\angle COD = 60^0$, звідки $1 = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. Задача № 13 залікового рубежу середньої ліги.

14. Задача № 14 залікового рубежу молодшої ліги.

15. Задача № 15 залікового рубежу середньої ліги.

16. Задача № 16 залікового рубежу середньої ліги.

17. ***Відповідь:*** $-\frac{1}{4} \le a \le \frac{1}{4}$.

***Розв'язання*.** Оскільки це сума двох опуклих функцій, то їх мінімум може досягатися в точках, де вирази з модулем дорівнюють нулеві, тобто у точках $x = \pm a$. Оскільки $f(a) = 6|a|$ та $f(-a) = 4|a|$. Зрозуміло, що $4|a| \le 6|a|$, тому розв'язок існує при $4|a| \le 1$ або $-\frac{1}{4} \le a \le \frac{1}{4}$.

18. Задача № 18 залікового рубежу молодшої ліги.

19. Задача № 19 залікового рубежу середньої ліги.

20. Задача № 20 залікового рубежу середньої ліги.