X всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

XII устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 13 апреля 2014 года

8–9 класс

1. В треугольнике ABC: $\angle A = 45^\circ$, BH — высота, точка K лежит на стороне AC, причем $BC = CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с центром вневписанной окружности треугольника BCH.

(*Вневписанной окружностью называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.*)

2. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка M так, что $AD = DM$. На стороне AD взята точка N так, что $AB = BN$. Докажите, что $CM = CN$.

3. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждая диагональ равна какой-то стороне?

4. В треугольнике ABC серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают сторону AC в точках P и Q соответственно, причем точка P лежит на отрезке AQ. Докажите, что описанные окружности треугольников PBC и QBA пересекаются на биссектрисе угла PBQ.

8–9 класс

5. Отрезок AD — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC.

6. Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB взята точка M такая, что угол MAB на 15° больше угла MAC, а угол MCB на 15° больше угла MBC. Найдите угол BMC.

X всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

XII устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 13 апреля 2014 года

8–9 класс

1. В треугольнике ABC: $\angle A = 45^\circ$, BH — высота, точка K лежит на стороне AC, причем $BC = CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с центром вневписанной окружности треугольника BCH.

(*Вневписанной окружностью называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.*)

2. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка M так, что $AD = DM$. На стороне AD взята точка N так, что $AB = BN$. Докажите, что $CM = CN$.

3. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждая диагональ равна какой-то стороне?

4. В треугольнике ABC серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают сторону AC в точках P и Q соответственно, причем точка P лежит на отрезке AQ. Докажите, что описанные окружности треугольников PBC и QBA пересекаются на биссектрисе угла PBQ.

8–9 класс

5. Отрезок AD — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC.

6. Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB взята точка M такая, что угол MAB на 15° больше угла MAC, а угол MCB на 15° больше угла MBC. Найдите угол BMC.

X всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

XII устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 13 апреля 2014 года

10–11 класс

1. В трапеции $ABCD$: $BC < AD$, $AB = CD$, K — середина AD, M — середина CD, CH — высота. Докажите, что прямые AM, CK и BH пересекаются в одной точке.

2. Можно ли правильную треугольную призму разрезать на две равные пирамиды?

3. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Описанные окружности треугольников AIC_1 и CIA_1 повторно пересекают дуги AC и BC (не содержащие точек B и A соответственно) описанной окружности треугольника ABC в точках C_2 и A_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

4. Медианы AA_0, BB_0 и CC_0 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M, а высоты AA_1, BB_1 и CC_1 — в точке H. Касательная к описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ в точке C_1 пересекает прямую A_0B_0 в точке C'. Точки A' и B' определяются аналогично. Докажите, что A', B' и C' лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой MH.

10–11 класс

5. Дан правильный треугольник ABC, площадь которого равна 1, и точка P на его описанной окружности. Прямые AP, BP, CP пересекают соответственно прямые BC, CA, AB в точках A', B', C'. Найдите площадь треугольника $A'B'C'$.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a — центры вневписанных окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка K пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD.

X всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

XII устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 13 апреля 2014 года

10–11 класс

1. В трапеции $ABCD$: $BC < AD$, $AB = CD$, K — середина AD, M — середина CD, CH — высота. Докажите, что прямые AM, CK и BH пересекаются в одной точке.

2. Можно ли правильную треугольную призму разрезать на две равные пирамиды?

3. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Описанные окружности треугольников AIC_1 и CIA_1 повторно пересекают дуги AC и BC (не содержащие точек B и A соответственно) описанной окружности треугольника ABC в точках C_2 и A_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

4. Медианы AA_0, BB_0 и CC_0 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M, а высоты AA_1, BB_1 и CC_1 — в точке H. Касательная к описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ в точке C_1 пересекает прямую A_0B_0 в точке C'. Точки A' и B' определяются аналогично. Докажите, что A', B' и C' лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой MH.

10–11 класс

5. Дан правильный треугольник ABC, площадь которого равна 1, и точка P на его описанной окружности. Прямые AP, BP, CP пересекают соответственно прямые BC, CA, AB в точках A', B', C'. Найдите площадь треугольника $A'B'C'$.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a — центры вневписанных окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка K пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD.