XVII международная олимпиада по математике Русановского лицея 2012

6 класс

1 тур.

1. До отхода поезда остается 2 минуты. Расстояние до вокзала – 2 км. Если первый километр бежать со скоростью 30 км/ч, то можно ли успеть на поезд?

Решение: Если первый километр бежать со скоростью 30 км/ч, то на него уйдет 1/30 часть часа, т.е. как раз 2 минуты. На поезд – не успеть!

2. Два пирата играли на золотые монеты. Сначала второй проиграл половину своих монет (отдал первому), потом первый проиграл половину своих, потом снова второй проиграл половину своих. В результате у первого оказалось 20 монет, а у второго – 11. Сколько монет было у первого пирата до начала игры?

Решение: Решаем с конца .
Так как после третьей игры у первого было 20 монет, а у второго – 11, то второй в третьей игре проиграл 11 монет. Тогда после второй игры у второго было 22 монеты, а у первого 9, и он проиграл во второй игре тоже 9 монет. Значит, до начала второй игры у первого было 18 монет, а у второго – 13. Но второй проиграл в первой игре половину своих монет, т.е. 13. Тогда до начала игры у первого было 5 монет.

3. Дедушке столько лет, сколько месяцев внучке. Вместе им 91 год. Сколько дет дедушке и сколько – внучке?

Решение: Так как в году 12 месяцев, то дедушка в 12 раз старше внучки, тогда внучке 91 : 13 = 7 лет. А дедушке – 84 года.

4. Расставьте скобки так, чтобы равенство было верным: 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 120 = 1.

Решение: $(1:2:3:4):(5:120)=1$

5. На планете Урап, что в созвездии Тау Кита, один год длится 18 месяцев, и каждый месяц длится 10 дней. Каждый 7-й год високосный (этот год на 1 день длиннее, чем другие годы), в этот год третий месяц имеет 11 дней. Каждая неделя состоит из пяти дней: Лунный, Солнечный, Земной, Ураповый, Прогулочный день. Дурап, один из жителей планеты Урап, родился в Ураповый день, в первый день четвертого месяца високосного года. В какой день недели он будет праздновать свое 15-летие?

Решение: Год на Урапе длится 180 дней. Разделив 180 на 5 (количество дней в неделе), получим 36 ровно. Значит, каждый день рождения Дурапа будет приходиться на один и тот же день недели (исключая високосный год). За 15 лет выпадает 2 високосных года, каждый такой год день рождения Дурапа смещается на один день недели вперед. Следовательно, свое 15-летие Дурап будет праздновать в Лунный день.

2 тур

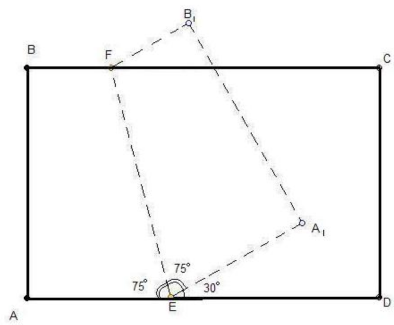
1. В некотором войсковом соединении самый старший по рангу – капитан. Кроме него, есть один старший лейтенант, два лейтенанта, 12 сержантов и много солдат. Число подчиненных в 10 раз больше числа начальников. Сколько всего человек в этом соединении?

Решение: Так как все, кроме солдат – начальники, то начальников 16. Тогда подчиненных по условию – 160. Причем, подчиненными являются все, кроме капитана. Тогда в формировании всего 161 человек.

2. У трехзначного числа поменяли местами две последние цифры и сложили полученное число с исходным. В результате получилось число 1187. Найдите все такие числа и объясните, почему других нет.

Решение: Заметим, что первая цифра искомых чисел – 5, так как если она меньше 5, то сумма меньше 1000, а если она больше 5, то сумма – больше 1200. Сумма последних цифр может равняться 7 или 17. В первом случае сумма чисел оканчивается на 77, что неверно. 17 в сумме могут дать только 8 и 9. Отсюда получаем два возможных ответа 598 и 589.

3. Прямоугольный лист бумаги (ABCD) согнули так, как показано на рисунке. Оказалось, что $\angle A_1ED = 30°$. Найдите $\angle FEA$.



Решение: Если развернуть лист в первоначальное положение, то угол AED – развернутый, тогда $2\angle FEA + 30^0 = 180^0$. Отсюда искомый угол составляет 75^0.

7 класс

1 тур

1. У всех жителей страны Страннолапия одна нога больше другой на один или два размера. Однажды в обувной магазин отправилась компания жителей, которая приобрела определенное количество обуви. После этого у них остались два лишних башмака: один 36-го размера, другой – 45-го размера. Какое наименьшее количество человек могло быть в этой компании?

   Решение: Очевидно, в этой компании не могло быть 4 человека, поскольку даже в крайнем случае (одна нога больше, чем другая на 2 размера) диапазон размеров будет с 36-го по 44-ый, что противоречит условию. Покажем, каким образом указанная в условии ситуация могла случиться для компании из 5 человек: 36 – 38; 38 – 40; 40 – 42; 42 – 44; 44 – 45.
   Ответ: 5 человек.

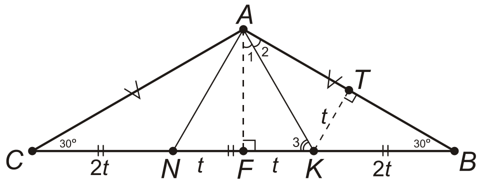
2. Найдите последнюю цифру значения выражения $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2012 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2013$?
   Решение: Выражение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2012$ содержит число 10 как множитель. А значит, значение этого выражения оканчивается цифрой 0. Выражение $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2013$ содержит число 5 как множитель. Значит, значение этого выражения оканчивается цифрой 5. Таким образом, данное в условии выражение оканчивается цифрой 5.
   Ответ: 5

3. В семье четыре человека. Если дочери удвоят стипендию, то общий доход всей семьи увеличится на 5%. Если вместо этого дедушке удвоят пенсию, то на 15%. Если же маме удвоят зарплату, то на 25%. На сколько процентов увеличится доход всей семьи, если удвоят зарплату папе?

   Решение: *Способ первый.* Если дочке удвоят стипендию, то семейный доход увеличится на размер этой стипендии. Следовательно, стипендия дочки составляет 5% общего дохода семьи. Аналогично, дедушкина пенсия составляет 15%, а зарплата мамы 25% общего дохода. Оставшуюся часть 100% - 5% - 15% - 25%=55% составляет зарплата папы. Значит, если ему удвоят зарплату, то доход всей семьи увеличится на 55%.
   Способ второй. Если бы всем членам семьи стали платить вдвое больше, то общий доход увеличился бы на 100%. Из этого увеличения 5% приходится на дочку, 15% на дедушку, 25% на маму, а остальные 55% - на папу.
   Ответ: на 55%.

4. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle A = 120^\circ$. Точки K и N делят основание BC на три равные части: $BK = KN = NC$. Докажите, что треугольник AKN – равносторонний. *(М. Плотников – Е. Диомидов)*

   Решение:



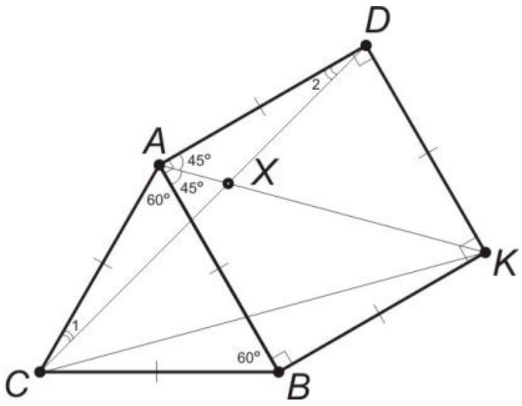
Очевидно, что $\angle B = \angle C = 30^\circ$. Тогда $\Delta\, ABK = \Delta\, ACN$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AK = AN$. Пусть $BK = KN = NC = 2t$. Проведем в равнобедренном треугольнике AKN высоту AF к основанию KN. Тогда $KF = FN = t$.

Проведем $KT \perp AB$. В $\Delta\, BTK$ катет TK лежит напротив угла 30°. Значит, $TK = \frac{1}{2} BK = t$. $\Delta\, AKT = \Delta\, AKF$ по катету и гипотенузе. Тогда $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 1 + \angle 2 = 60^\circ$ из $\Delta\, AFB$.

Следовательно, $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$. Тогда $\angle 3 = 60^\circ$ из ΔAFK. Значит ΔAKN – равносторонний (равнобедренный с углом 60º).

5. На стороне AB равностороннего треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат $ADKB$. X – точка пересечения CD и AK. Докажите, что $CX = XK$. *(В. Подхалюзин)*

Решение:



По условию ΔCAD – равнобедренный, а значит $\angle 1 = \angle 2 = \frac{180^\circ - 60^\circ - 90^\circ}{2} = 15^\circ$. Проведем CK. Поскольку $\angle CBK = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$, то $\Delta CAD = \Delta CBK$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда $\angle KCB = \angle CKB = 15^\circ$. Рассмотрим ΔCXK. В нём $\angle XCK = 60^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ и $\angle XKC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$. Значит ΔCXK – равнобедренный и $CX = XK$.

<u>2 тур</u>

1. Одно из трёх чисел равно среднему арифметическому двух других, второе – сумме двух других, а третье – произведению двух других чисел. Найдите эти три числа.

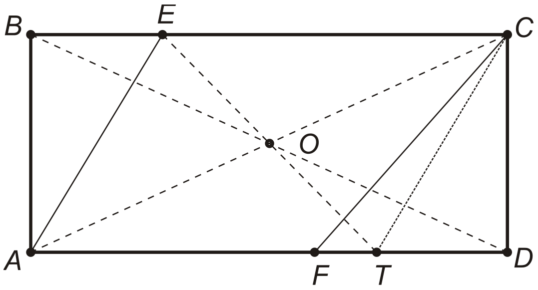
Решение: Пускай сумма всех трех чисел равна x. Число, которое равно сумме двух других, составляет половину суммы всех чисел. Тогда оно равно $\frac{x}{2}$. Число, которое равно полусумме двух других, составляет третью часть суммы всех чисел. Тогда оно равно $\frac{x}{3}$. Третье число составляет шестую часть суммы всех чисел, то есть оно равно $\frac{x}{6}$. С другой стороны, третье число равно произведению двух других чисел. Имеем уравнение: $\frac{x}{6} = \frac{x^2}{6}$; $x^2 - x = 0$. Откуда $x = 0$ или $x = 1$. Таким образом, искомые числа 0;0;0 или $\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{6}$.
Ответ: 0;0;0 или $\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{6}$.

2. Назовем четырёхзначное число «уравновешенным», если сумма его первых двух цифр равна сумме двух последних. (Например, число 2011 – «уравновешенное») Сколько существует «уравновешенных» чисел, кратных 9? *(М. Н. Рожкова)*

Решение: Если число $\overline{abcd}$ – «уравновешенное», то $a + b = c + d$. Тогда сумма его цифр четная. Если оно делится на 9,то сумма цифр кратна 9. Значит, сумма его цифр делится нацело на 18. Потому она равна 18 или 36 (других вариантов быть не может, поскольку 36=9+9+9+9 – максимальная сумма цифр). Если $a + b + c + d = 36$, то такое число единственное – 9999. Если же $a + b + c + d = 18$, то $a + b = c + d = 9$ и возможны случаи: для первых двух цифр – 18; 81; 27; 72; 36; 63; 45; 54; 90 (всего 9 вариантов); для последних двух цифр – 18; 81; 27; 72; 36; 63; 45; 54; 09; 90 (всего 10 вариантов). По правилу умножения общее количество таких чисел равно $9 \cdot 10 = 90$. Значит общее количество «уравновешенных» чисел, кратных 9 равно 90+1=91.
Ответ: 91.

3. Дана прямоугольная дощечка $ABCD$. Точки E и F взяты на сторонах BC и AD соответственно. Пользуясь только линейкой без делений определите, какой из отрезков больше: AE или CF? (делать засечки на линейке не разрешается) *(М. Н. Рожкова)*.

Решение:



Проведем диагонали AC и BD, которые пересекаются в точке O. Пусть луч EO пересекает AD в точке T. Нетрудно показать, что $CT = AE$ (из соображения симметрии или из равенства соответствующих треугольников). Если окажется, что точка T левее точки F, то $CT > CF$ и $AE > CF$. Если же точка T находится между точками F и D, то $CF > CT$ и, следовательно, $CF > AE$.

8 класс.

1. Коля отметил на числовой прямой несколько точек красным цветом. Оказалось, что сумма координат всех этих точек равна 2012, причем сумма координат двух крайних точек равна 400. Затем Саша отметил синим цветом середину каждого отрезка, соединяющего две соседние красные точки. Найдите сумму координат всех синих точек.

Решение: Пусть красных точек четыре и их координаты равны a, b, c, d тогда между ними три синие точки и сумма координат синих точек равна $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}(c+d)=\frac{1}{2}a+b+c+\frac{1}{2}d$. Тогда сумма координат синих для любого числа точек из этого случая находится легко: (сумма координат красных точек)- $\frac{1}{2}$ (суммы координат крайних точек). Подставим значения из условия: 2012-200=1812.
Ответ: 1812.

2. Докажите, что на параболе $y=\frac{3}{16}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}$ можно найти бесконечно много точек вида, *(m^2; n)* где m, $n \in N$. (*М.Н. Рожкова*)

Решение: Пусть $x=m^2$ подставим в уравнение параболы $y=\frac{3m^4+4m^2+1}{16}=\frac{(3m^2-1)(m^2-1)}{16}=\frac{(m-1)(m+1)(3m^2-1)}{16}$
Если m – четное, то числитель не делится на 16, а если нечетное, то делится так как одно из чисел (m-1), (m+1) делится на 4, а (3 m^2-1) делится на 8.

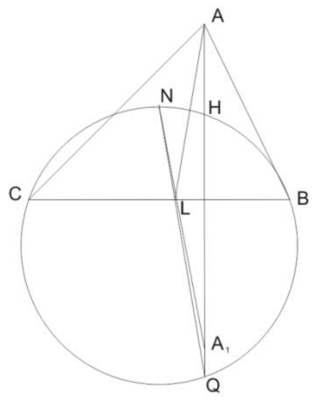
3. Плоскость раскрасили двумя цветами. Докажите, что всегда найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1см друг от друга.

Решение: Из условия следует, что можем выбрать две точки A и B разного цвета. Тогда рассмотрим два варианта:

a)A и B на расстоянии меньше 1см друг от друга, тогда можно выбрать точку C на расстоянии 1см и от A и от B, тогда какая-то из пар AC или BC будет содержать две точки разного цвета на расстоянии 1см.

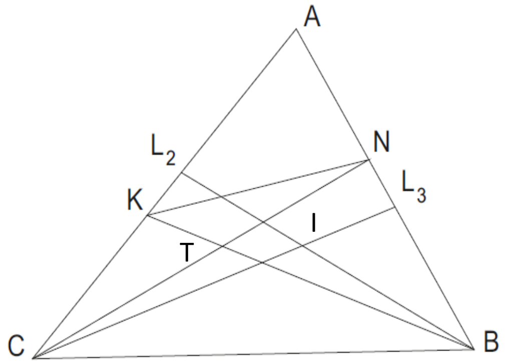
b) A и B на расстоянии больше 1см друг от друга, тогда на прямой AB от точки A в сторону к B будем откладывать единичные отрезки и на их концах отмечать точки AM_1, M_1M_2,… тогда либо какая-то из точек M_i , i=1,2,… будет отлична от A либо наконец расстояние M_iB станет меньше 1см и мы вернемся к выше рассмотренному случаю.

4. Дан остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H. Точка L — основание биссектрисы угла A. Около треугольника HBC описана окружность ω. Точка N – середина дуги BHC. Q — точка пересечения прямых NL и AH. Докажите, что точка Q лежит на окружности ω. (*А.В. Карлюченко*)



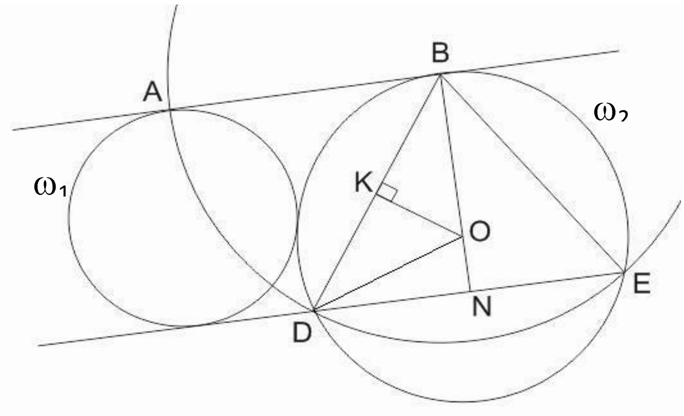
Решение: Пусть точка A_1- точка, симметричная A относительно BC. Так как $\angle BA_1C=\angle A$ и $\angle BHC=180-\angle A$, то $A_1\in \omega$. Очевидно, что A_1L- биссектриса в треугольнике BA_1C (из соображений симметрии). Поскольку N-середина дуги BHC, то точки A_1, L,N принадлежат одной прямой. Следовательно точки N, L, и Q – тоже одна прямая. При этом $A_1 \in AH$ и $Q \in AH$. Следовательно точки Q и A_1 совпадают.

5. На сторонах AC и AB треугольника ABC выбраны точки K и N соответственно так, что CK=KN=NB. Докажите, что $\angle L_2BK = \angle NCL_3$, где L_2 и L_3 – основания биссектрис углов B и C соответственно. (*А. Грищенко*)



Решение: Пусть $\angle KCN=x$, $\angle KBN=y$. Тогда $\angle KNC=x$ и $\angle NKB=y$ (из равнобедренности треугольников KCN и KNB). Отсюда $\angle AKN=2x$ и $\angle ANK=2y$ (как внешние для треугольников KCN и KNB). В треугольнике AKN углы равны A, 2x и 2y, отсюда $2x+2y+A=180^\circ$, откуда $x+y=90^\circ-A/2$. Тогда $\angle KTN=90^\circ+A/2$ (из треугольника KTN). А значит и вертикальный с ним $\angle BTC=90^\circ+A/2$. Поскольку $\angle BIC=90^\circ+A/2$ (известный факт геометрии треугольника), то точки B; I; T; C принадлежат одной окружности и $\angle L_2BK=\angle NCL_3$.

6. Даны две окружности ω_1 и ω_2, касающиеся внешним образом. К ним проведена общая касательная AB (т. $A \in \omega_1$; т. $B \in \omega_2$). Окружность с центром в точке B радиуса BA пересекает ω_2 в точках D и E. Докажите, что прямая DE касается ω_1. (*В. Подхалюзин*)



Решение: Проведем высоту BN в треугольнике BDE. Так как треугольник равнобедренный (BE=BD – радиусы окружности с центром в точке B), то центр ω_2 будет лежать на высоте BN. OK – перпендикуляр к стороне BD (O – центр ω_2). Треугольники BOK и BDN подобны, тогда $\frac{BO}{BD}=\frac{BK}{BN}$, откуда $BN = BD \cdot \frac{BK}{BO}$. Так как треугольник BOD – равнобедренный, то BK=KD. Тогда BK=BD/2.

Подставив, получаем, что $BN=\frac{BD^2}{2BO}$. Нетрудно показать, что $AB^2=4r_1r_2$, где r_1 и r_2 – радиусы окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Так как $BO=r_2$, то $BN=2r_1$. Отрезок OB перпендикулярен AB. Тогда DE параллелен AB и $BN=2r_1$, то есть DE касательная к ω_1.

Командная олимпиада для 9-10 класса

1. В таблице 10x10 последовательно по возрастанию расставлены числа от 0 до 99, и перед некоторыми из этих чисел поставлен знак «минус». Оказалось, что в каждой строке и в каждом столбце есть ровно пять отрицательных чисел. Какие возможные значения может принимать сумма всех чисел таблицы?

Решение: Запишем каждое из чисел в таблице в виде $\pm(10i + j)$, где i – число десятков, j – единиц. Тогда, в силу последовательной записи, во всех строках таблицы будут одинаковые значения i , а во всех столбцах – одинаковые значения *j*. Для того, чтобы найти сумму всех чисел таблицы, сложим отдельно десятки и единицы. Но, поскольку в условии указано, что в каждой строке по пять положительных и отрицательных чисел, то сумма всех десятков будет равной нулю; с другой стороны, поскольку в каждом столбце тоже будет по пять положительных и отрицательных чисел, то сумма единиц тоже окажется равной нулю. Следовательно, общая сумма всех чисел в такой таблице может принимать ровно одно значение – ноль.

Иллюстрация к представлению чисел в таблице (так будут выглядеть все таблицы, если не учитывать знаки чисел):

0+0	0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8	0+9
10+0	10+1	10+2	10+3	10+4	10+5	10+6	10+7	10+8	10+9
20+0	20+1	20+2	20+3	20+4	20+5	20+6	20+7	20+8	20+9
30+0	30+1	30+2	30+3	30+4	30+5	30+6	30+7	30+8	30+9
40+0	40+1	40+2	40+3	40+4	40+5	40+6	40+7	40+8	40+9
50+0	50+1	50+2	50+3	50+4	50+5	50+6	50+7	50+8	50+9
60+0	60+1	60+2	60+3	60+4	60+5	60+6	60+7	60+8	60+9
70+0	70+1	70+2	70+3	70+4	70+5	70+6	70+7	70+8	70+9
80+0	80+1	80+2	80+3	80+4	80+5	80+6	80+7	80+8	80+9
90+0	90+1	90+2	90+3	90+4	90+5	90+6	90+7	90+8	90+9

Замечание: Данная задача естественным образом обобщается: если в таблице $n\times n$ последовательно расставлены числа от 0 до n^2-1, а также расставлены минуса так, что в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно k отрицательных чисел, то сумма всех чисел такой таблицы может принять только одно значение, равное $S = \frac{(n-2k)\cdot n\cdot(n+1)^2}{2}$.

2. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{10}+\left(\frac{b}{c}\right)^{10}+\left(\frac{c}{d}\right)^{10}+\left(\frac{d}{a}\right)^{10}\ge abcd\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+\frac{1}{d^4}\right).$$

Решение: Заметим, что левую часть данного неравенства можно записать в таком виде:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{10}+\left(\frac{b}{c}\right)^{10}+\left(\frac{c}{d}\right)^{10}+\left(\frac{d}{a}\right)^{10}=\frac{1}{10}\left(1\left(\frac{a}{b}\right)^{10}+2\left(\frac{b}{c}\right)^{10}+3\left(\frac{c}{d}\right)^{10}+4\left(\frac{d}{a}\right)^{10}\right)+$$

$$+\frac{1}{10}\left(2\left(\frac{a}{b}\right)^{10}+3\left(\frac{b}{c}\right)^{10}+4\left(\frac{c}{d}\right)^{10}+1\left(\frac{d}{a}\right)^{10}\right)+\frac{1}{10}\left(3\left(\frac{a}{b}\right)^{10}+4\left(\frac{b}{c}\right)^{10}+1\left(\frac{c}{d}\right)^{10}+2\left(\frac{d}{a}\right)^{10}\right)+$$

$$+\frac{1}{10}\left(4\left(\frac{a}{b}\right)^{10}+1\left(\frac{b}{c}\right)^{10}+2\left(\frac{c}{d}\right)^{10}+3\left(\frac{d}{a}\right)^{10}\right).$$

Каждую из больших скобок теперь можно оценить по неравенству Коши для десяти; получаем, например:

$$\frac{1}{10}\left(1\left(\frac{a}{b}\right)^{10}+2\left(\frac{b}{c}\right)^{10}+3\left(\frac{c}{d}\right)^{10}+4\left(\frac{d}{a}\right)^{10}\right)\ge\sqrt[10]{\frac{a^{10}}{b^{10}}\frac{b^{20}}{c^{20}}\frac{c^{30}}{d^{30}}\frac{d^{40}}{a^{40}}}=\frac{bcd}{a^3}.$$

Оценив все четыре большие скобки, мы получим искомое неравенство.

Замечание: Данное неравенство также можно обобщить для произвольного числа N вида $N=\frac{n(n+1)}{2}$ и соответствующего набора положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$; в более общем виде неравенство выглядит так:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^N+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^N+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^N\ge a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1^n}+\frac{1}{a_2^n}+\ldots+\frac{1}{a_n^n}\right)$$

3. Существует ли полином $p(x)$ степени 2012 с действительными коэффициентами, для которого верно утверждение: $p(x^2-1)$ делится на $p(x)$ без остатка?

Решение: Оказывается, существует.

Будем искать наш полином в виде $p(x)=(x+a)^{2012}$, где a – некоторое число. Тогда условие $p(x^2-1)\vdots p(x)$ (т.е. $(x^2-1+a)^{2012}\vdots(x+a)^{2012}$) выполняется, если x^2-1+a делится на $x+a$. В свою очередь, поскольку $x^2-1+a=x^2-a^2+a^2-1+a$ и x^2-a^2 делится на $x+a$, нам достаточно потребовать, чтобы выполнялось условие: $a^2+a-1=0$. Отсюда мы находим подходящие значения а: $a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, например, полином $p(x)=\left(x+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2012}$ обладает требуемым свойством.

4. Числа Фибоначчи определяются как $f_0=0$, $f_1=1$ и $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, $n\ge 2$. Докажите, что для чётных n верно равенство:

$$arctg\left(\frac{1}{f_n}\right)=arctg\left(\frac{1}{f_{n+1}}\right)+arctg\left(\frac{1}{f_{n+2}}\right),$$

где значения арктангенсов берутся из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение: Обозначим $\alpha=arctg\left(\frac{1}{f_n}\right)$, $\beta=arctg\left(\frac{1}{f_{n+1}}\right)$, $\gamma=arctg\left(\frac{1}{f_{n+2}}\right)$. Тогда, если условие задачи верно, то $\alpha=\beta+\gamma$ и $ctg\alpha=\dfrac{ctg\beta\cdot ctg\gamma-1}{ctg\beta+ctg\gamma}$. С другой стороны, понятно, что $ctg\alpha=f_n$, $ctg\beta=f_{n+1}$ и $ctg\gamma=f_{n+2}$. Подставив эти значения, получим тождество $f_n f_{n+3}=f_{n+1}f_{n+2}-1$, которое должно выполняться для чётных значений n. Это тождество легко доказать методом математической индукции.

Замечание: Тождество, полученное в ходе решения данной задачи, является частным случаем более известного тождества д'Оканьи для чисел Фибоначчи:

$$f_m f_{n+1}-f_n f_{m+1}=(-1)^m f_{m-n},\ m\ge n.$$

Тождество из задачи получается при чётном n и $m=n+2$.

5. Докажите, что для любых целых неотрицательных n и k число $C_n^k C_n^{k+1}$ делится на n (здесь $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент).

Решение: Непосредственно из определения биномиального коэффициента следует так называемое свойство понижения индексов: $C_n^k=\dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$. Воспользуемся этим свойством.

Рассмотрим число $N(n,k)=\dfrac{1}{n}C_n^kC_n^{k+1}$; нам необходимо показать, что это число является целым. Видим, что:

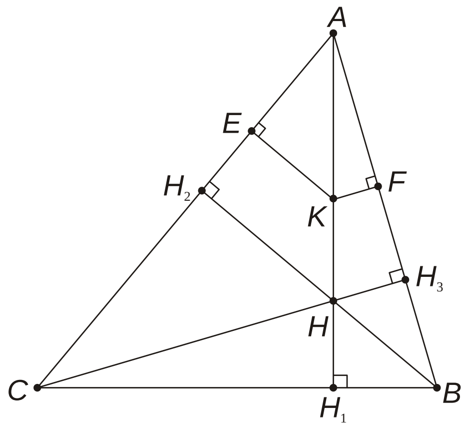
$$N(n,k)=\frac{1}{n}C_n^kC_n^{k+1}=\frac{(k+1)-k}{n}C_n^kC_n^{k+1}=\frac{k+1}{n}C_n^kC_n^{k+1}-\frac{k}{n}C_n^kC_n^{k+1}=C_n^kC_{n-1}^k-C_{n-1}^{k-1}C_n^{k+1}.$$

Поскольку все биномиальные коэффициенты являются целыми числами, то и рассматриваемое нами число $N(n,k)$ тоже является целым.

Замечание1: Числа $N(n,k)$ называются *числами Нараяны* в честь индийского математика Тадепалли Венкаты Нараяны. Числа Нараяны возникают в различных комбинаторных задачах (таких, как подсчёт правильных скобочных структур, непересекающихся разбиений множеств и монотонных путей на квадратных решётках с различными ограничениями) и тесно связаны с более известными числами Каталана.

Замечание2: Условие задачи также поддаётся обобщению. В частности, для любого целого неотрицательного t будет верно, что число $tC_n^kC_n^{k+t}$ будет делиться на n.

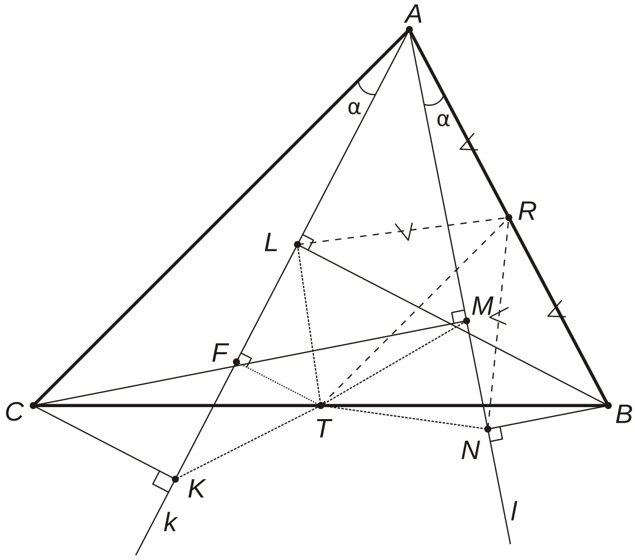
6. На высоте AH1 треугольника ABC нашлась такая точка K, что сумма расстояний от не до сторон AB и AC оказалась равной AK. Доказать, что в треугольнике ABC сумма высот, опущенных на стороны AB и AC, равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей треугольника ABC окружностей. (А.В. Карлюченко)



Решение: По рисунку видно, что при гомотетии с центром в токе A четырехугольник AEKF переходит в треугольник AH_2HH_3. Откуда следует, что $AH = HH_2 + HH_3$. Или $BH_2 + CH_3 = AH + BH + CH = 2(OM_1 + OM_2 + OM_3) = 2(R + r)$ – по теореме Карно.

7. Из вершины A треугольника ABC провели прямые l и k, симметричные относительно биссектрисы угла A. Пусть K, L, M, N – основания перпендикуляров, опущенных на l и k из вершин B и C. Доказать, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности с центром на BC. (*А.В. Карлюченко*)

Решение: Пусть T и R – середины сторон BC и AB. Пусть F – основание перпендикуляра, опущенного из T на k.



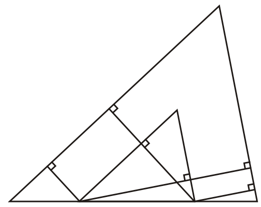
Очевидно, из того, что CK ∥ FT ∥LB и CT = BT следует равенство KF = FL. Т.е. точка T лежит на серединном перпендикуляре к KL, и TK = TL. Аналогично показываем, что TM = TN.

Пусть углы CAK и NAB равны α. Тогда угол NRB = 2α (внешний для равнобедренного треугольника ARN). Аналогично угол LRB = 2(A – α). Тогда из того, что угол TRB = A, следует равенство углов TRN и LRT. Откуда следует равенство треугольников TRN и LRT, и соответственно отрезков TL = TN.

8. В разностороннем треугольнике нашли три такие различные точки, что суммы расстояний от них до сторон треугольника соответственно равны. Доказать, что эти три точки лежат на одной прямой. (*А. Потапенко*)

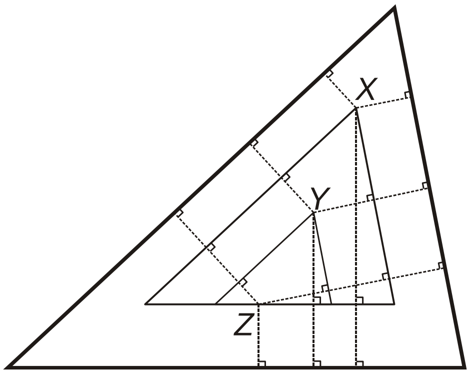
Решение:

Лемма. В разностороннем треугольнике ABC на основании BC не существует двух различных точек с одинаковой суммой расстояний до AB и AC.



Доказательство леммы: Доказательство следует из маленького треугольника на рисунке: треугольник разносторонний и его высоты разные.

Пусть X, Y, Z – данные точки. Построим треугольники как показано на рисунке. Маленький и средний треугольник гомотетичны с центром гомотетии в точке Z, поскольку оба треугольника параллельны и точка Z – аналогично-соответствующая точке на стороне, сумма расстояний от которой до боковых сторон равна высоте, опущенной на основание (по лемме такая точка единственная). Значит, Z-Y-X – прямая.



Примечание. Может оказаться, что мы не сможем для данных трех точек построить такой рисунок, т.е., например, точка Y находится вне среднего треугольника. В таком случае, с помощью гомотетии показываем, что все точки на XZ обладают свойством, описанном в условии. И просто проводим через Y прямую параллельно основанию до пересечения с XZ в точке U. Тогда точки U и Y обладают свойством из условия. Чего не может быть согласно лемме.

9. Дан остроугольный треугольник ABC и его окружность Эйлера. Через вершины A и B проведены две различные окружности, касающиеся окружности Эйлера в точках C_1 и C_2. Точки B_1, B_2, A_1, A_2 получаются аналогичными построениями. Доказать, что три прямые C_1C_2 , B_1B_2, A_1A_2 пересекаются в одной точке, принадлежащей прямой Ейлера. (*Д. Соскин*)

Решение: Проведём в точке C_1 общую касательную, которая является радикальной осью окружности Эйлера и окружности (ABC_1). Пусть она пересекает прямую AB в точке T_1. Поскольку прямая AB является радикальной осью описанной окружности (ABC) и окружности (ABC_1), то точка T_1 принадлежит радикальной оси описанной окружности (ABC) и окружности Эйлера. Проведём в точке C_2 общую касательную, которая является радикальной осью окружности Эйлера и окружности (ABC_2). Пусть она пересекает прямую AB в точке T_1*. Аналогично T_1* принадлежит радикальной оси описанной окружности (ABC) и окружности Эйлера. Значит, точки T_1 и T_1* совпадают. Тогда касательные, проведённые в точках B_1 и B_2 , A_1 и A_2 , пересекаются на прямых AC и BC в точках T_2 и T_3 соответственно. Поскольку каждая из точек T_1, T_2, T_3 принадлежит радикальной оси описанной окружности (ABC) и окружности Эйлера, то они лежат на одной прямой, перпендикулярной линии центров описанной окружности (ABC) и окружности Эйлера. Прямые C_1C_2 , B_1B_2, A_1A_2 являются полярами точек T_1, T_2, T_3. Тогда поляры C_1C_2 , B_1B_2, A_1A_2 пересекаются в одной точке X, поскольку полюсы этих поляр лежат на прямой. Точка X является полюсом прямой $T_1T_2T_3$ (так как если полюс лежит на поляре, то поляра проходит через полюс). Поэтому прямая EX перпендикулярна прямой $T_1T_2T_3$, где точка E – центр окружности Эйлера. Тогда точки O; E; X принадлежат одной прямой – прямой Эйлера.