XXIII олімпіада з математики
Русанівського ліцею
6 клас
І тур

1. Сашко та Тетянка вчаться в 6 класі, до речі, кількість дітей у їхніх класах однакова. Сашко сказав: «У моєму класі хлопчиків у двічі більше, ніж у твоєму, Тетянко!»

- А у моєму класі дівчат у тричі більше, ніж у тебе!- відповіла Тетянка. Чи може таке бути?

Відповідь:так

<u>*Розв'язок:*</u>

Нехай у класі в Тетянки навчається x хлопчиків, тоді в класі у Сашка- $3x$ хлопчиків. Нехай у класі в Сашка навчається y дівчаток, тоді в класі у Тетянки $3y$ дівчаток. Кількість дітей у їхніх класах однакова, то $x + 3y = 2x + y$; $2y = x$.
Тобто $x + 3y = 5y$. Значить, кількість дітей у кожному класі кратна 5. Наприклад, у кожному класі по 30 учнів. У класі Тетянки 18 хлопчиків і 12 дівчаток, а в Сашка – 24 хлопчики і 6 дівчаток.

2. Зазвичай Петрик виконує роботу за 6 годин. Але якщо він перед цим вип'є квасу, то впорається за 3 години. Одного разу він почав працювати о 12 годині і закінчив за 4 години. О котрій годині йому принесли квас?

Відповідь: о 14 годині

<u>*Розв'язок:*</u>

Петрик закінчив роботу на 2 години скоріше, отже, він випив квас за 4 години до кінця роботи. Тобто квас йому принесли о 14 годині.

3. На кожній з 6 карток написана цифра від 1 до 6 (кожна по одному разу). На листочку записана «заготовка» арифметичного виразу $(* + *) \cdot (* + *) \cdot (* + *)$. Миколка обирає одну з зірочок та накриває її карткою, потім те ж саме виконує Оля. Так по черзі вони роблять, поки не накриють усі зірочки. Оля хоче, щоб після цього результат дорівнював числу 240. Чи зможе Миколка завадити їй?

Відповідь: не зможе

<u>*Розв'язок*</u>

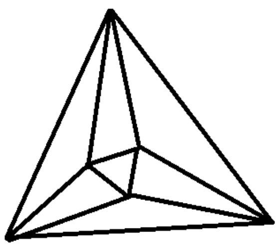
Не зможе, якщо Оля обере правильну стратегію. Розіб'ємо усі картки на пари: 1 і 2; 3 і 5; 4 і 6. Як тільки Миколка кладе одну картку, Оля кладе другу карту з пари, тоді

$$(1 + 2) \cdot (3 + 5) \cdot (4 + 6) = 240.$$

4. Розташуйте на площині 6 точок та з'єднайте їх відрізками, які не перетинаються, так щоб кожна точка була з'єднана відрізками рівно з чотирма іншими точками.

<u>*Розв'язок:*</u>

Наприклад



5. Барон Мюнхгаузен стверджує, що нерівність
ДВА $\times$ ШІСТЬ$<$ ДВАДЦЯТЬ вірна для будь-яких значень букв. При цьому різним буквам відповідають різні цифри, а однаковим – однакові. Чи правий Барон?

Відповідь:ні

Розв'язок:

Очевидно, що ДВА $\times$ ШІСТЬ $<$ ДВА $\times$ 100 000 $<$ ДВАДЦЯТЬ. Дійсно, ШІСТЬ – п'ятицифрове число, а 100000 – шестицифрове. Але 100 000 – найменше шестицифрове число, тому 5 цифр, зашифрованих буквами ДЦЯТЬ – це більше, ніж 5 нулів.

II тур

6. Барон Мюнхгаузен поспішав до свого друга-математика із швидкістю 6 миль за годину. О 9.00 ранку він випустив поштового голуба, щоб той сповістив математика про візит Барона. Голуб доставив листа, зразу повернув назад і сів на руку Барона о 9.45 ранку. О котрій годині голуб доставив листа математику, якщо швидкість його польоту 10 миль за годину?

Відповідь: о 9 год 36 хв

Розв'язок:

Якщо вважати Барона нерухомим, то голуб відлітає від Барона із швидкістю 4 милі за годину, а повертається із швидкістю 16 миль за годину. Тобто голуб повертається із швидкістю у 4 рази більшою, ніж відлітає. Отже, на зворотний шлях він витратив у 4 рази менше часу, тобто 1/5 всього часу польоту – 9 хвилин. Значить, голуб доставив листа о 9 год 36 хв.

7. У дворі стоять 5 будинків. У них живуть 5, 15, 25. 35 та 45 мешканців. Відомо, що в кожного є не менше 2 тезок серед жителів двору. Доведіть, що дехто має тезку у своєму домі.

Розв'язок:

Розглянемо найбільший будинок з 45 мешканцями. Припустимо, що жоден з них не має тезки в цьому домі. Тоді 1) усі жителі цього дому мають різні імена; 2) ніхто не може бути тезкою одразу двох мешканців цього дому. Тому сумарна кількість тезків у жителів великого дому не менша 90. І усі вони живуть у будинках, що залишилися. Але там 80 людей. Отже, припущення неправильне. Обов'язково хтось із мешканців великого дому має тезку у своєму домі.

8. Барон Мюнхгаузен стверджує, що може здійснити диво, якщо висмикне із своїх вусів 1 волосину. При цьому на місці двох зниклих волосинок виростає одна нова. Скільки див може здійснити Барон, якщо в його вусах 2018 волосинок?

Відповідь: 4035

Розв'язок:

При здійсненні двох див кількість волосинок зменшується на 1. Після здійснення $2017 \times 2 = 4034$див у Барона залишиться 1 волосина, яку він використає ще на 1 диво. Отже, він зможе здійснити 4035 див.

Третій тур

9. Надійка задумала число N, яке ділиться на 500, і виписала на дошці усі його натуральні дільники, крім самого числа N. Доведіть, що сума непарних чисел на дошці менша, ніж сума парних.

Розв'язок:

Відмітимо, що N– парне, до того ж кратне 4. Якщо d– непарний дільник числа N, то 2d– також його дільник. Причому, $2d \neq N$, оскільки 2d не ділиться на 4. Тоді кожного разу з числом dзаписане і число 2d. Отже, сума непарних чисел не просто менша, а принаймні у два рази менша, ніж сума парних чисел, записаних Надійкою.

10. Порівняйте $A = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{9\cdot 10}$ і $B = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{40}$.

Відповідь: $A < B$

Розв'язок:

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} < 1.$$

$B = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{40} > \frac{13}{12} > 1$,

тому що $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20} > 10 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$;

а $\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{30} > 10 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{3}$;

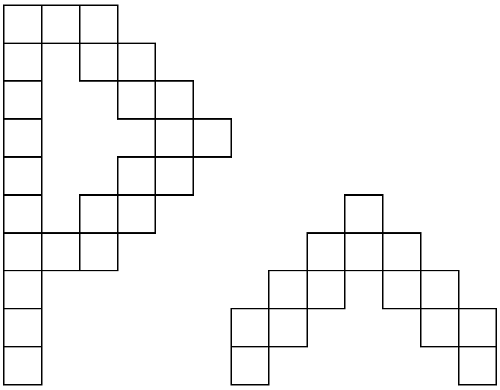
та $\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{40} > 10 \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{4}$. отже

$$B > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$$

7 клас

І тур

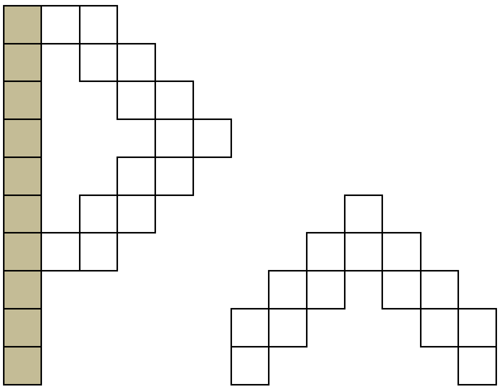
1. З паперу в клітинку вирізали літери Р і Л, як показано на рисунку. Двоє ліцеїстів по черзі зафарбовують прямокутники $1 \times n$ ($n \in N$). Програє той, хто не може зробити наступного ходу. Хто з ліцеїстів може забезпечити собі виграш? *(Тарас Тимошкевич)*



Відповідь:перший

Розв'язок:

Виграш може забезпечити собі той ліцеїст, що ходить першим. Якщо він на першому кроці зафарбує прямокутник 1×10, який показаний на рисунку, то зведе гру до зафарбування двох однакових фігур. Далі, просто повторюючи ходи другого гравця на іншій фігурі, він забезпечує собі останній хід, а отже, виграє.



2. На занятті фізичного практикуму вчитель поставив наступний експеримент. Він розклав на шалькові терези 16 гирьок масами 1, 2, 3, …, 16 г так, що одна з шальок переважила. П'ятнадцять учнів по черзі виходили з кабінету і забирали з собою по одній гирці, причому кожного разу терези змінювали своє положення й переважувала інша шалька. Яка гирка могла залишитися на терезах?

Відповідь: 1г.

Розв'язок:

На кожному кроці різниця в масах на шальках не менше 1 грама. Оскільки кожного разу переважувала протилежна шалька, то гирку масою 1 г взяти не могли на жодному кроці, бо тоді терези або врівноважились би, або положення шальок залишилось би незмінним.

3. Знайдіть найменше натуральне число, яке кратне до 225 і має суму цифр рівну 225.

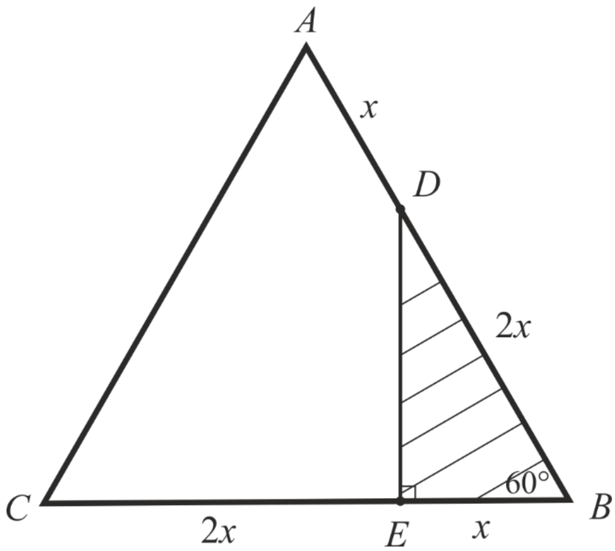
Відповідь: $6\underbrace{99\ldots9}_{23}75$.

Розв'язок:

Оскільки $225 = 9 \cdot 25$, то шукане число має ділитися націло і на 9, і на 25.
На 9 воно ділиться, оскільки сума цифр 225, отже, досить забезпечити подільність на 75. Тоді останніми цифрами шуканого числа можуть бути 00, 25, 50, 75. Отже, для мінімальності числа треба взяти 75. Зрозуміло, що перед цим мають бути дев'ятки, знову-таки із міркувань мінімальності числа. Їх можна взяти 23 штуки, оскільки $225 - 7 - 5 = 213$; $213 : 9 = 23$ (ост. 6), то шукане число дорівнює $6\underbrace{99\ldots9}_{23}75$.

4. Семикласник Петрик грався у піску на узбережжі моря. Спочатку він намалював рівносторонній трикутник *ABC*. Згодом поклав у точки *D* і *E* на сторонах *AB* і *BC* відповідно маленькі мушлі таким чином, щоб вони ділили сторони, яким належать, у відношеннях 2 : 1 та 1 : 2, рахуючи від вершини *B*. Несподівана хвиля змила трикутник з піску, однак мушлі залишилися на місці. Допоможіть Петрику відновити трикутник *ABC*, виконуючи геометричні побудови за допомогою циркуля та лінійки. (*Г. Філіпповський*)

Розв'язок:



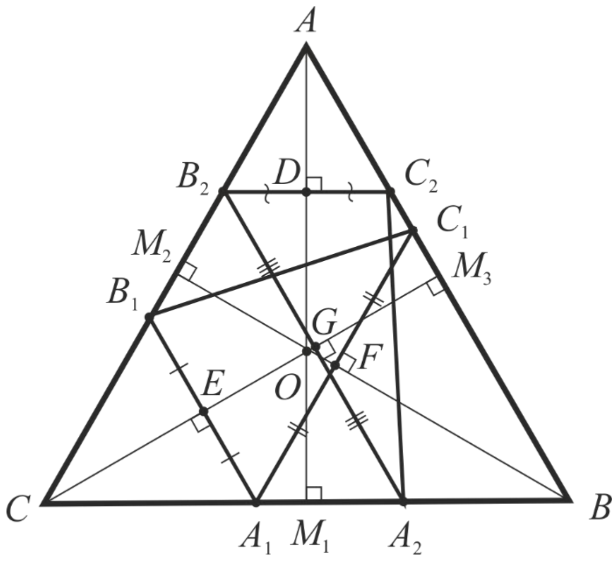
Проведемо аналіз задачі на побудову. Для цього розглянемо трикутник *DBE*, у якому сторона *BD*, виходячи з умови задачі, удвічі більша за сторону *BE*, а $\angle DBE = 60°$. Нескладно довести, що у такому випадку трикутник *DBE* є прямокутним.
Отже, побудову трикутника *ABC* за заданими точками *D* і *E* можна здійснити наступним чином. Трикутник *DBE* є базисним, оскільки його можна побудувати за катетом та гострим кутом. Далі відкладаючи на промені *BD* від точки *D* відрізок, удвічі менший за *BD*, отримаємо вершину *A* шуканого трикутника. Аналогічно, відкладаючи на промені *BE* від точки *E* відрізок, удвічі більший за *BE*, отримаємо вершину *C*.
Примітка. Під час пояснення розв'язання члени журі могли уточнити у учасника схему доведення того, що трикутник *DBE* є прямокутним (наприклад, за допомогою проведення допоміжної медіани до сторони *BD*) та побудови шаблонних кутів (наприклад, 60° або 30°).

5. У рівносторонньому трикутнику ABC через точку A_1 на стороні BC проведено прямі, паралельні двом іншим сторонам трикутника, які перетинають AC та AB у точках B_1 та C_1. Через точку B_2 на стороні AC проведено прямі, паралельні двом іншим сторонам, які перетинають BC та AB у точках A_2 та C_2. Доведіть, що центри описаних кіл трикутників $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ збігаються. (*Журі Русанівської олімпіади*)

Розв'язок:

Проведемо висоти рівностороннього трикутника *ABC* AM_1, BM_2, CM_3. Як відомо, вони одночасно є й серединними перпендикулярами до його сторін. Нехай $D = B_2C_2 \cap AM_1$,

$F = A_1C_1 \cap BM_2$, $E = A_1B_1 \cap CM_3$, $G = A_2B_2 \cap CM_3$. Оскільки $B_2C_2 \parallel BC$, то трикутник AB_2C_2 — рівносторонній, а пряма AD виявляється серединним перпендикуляром до B_2C_2. Оскільки $A_1C_1 \parallel AC$, то трикутник BA_1C_1 — рівносторонній, а пряма BF виявляється серединним перпендикуляром до A_1C_1. Оскільки $A_1B_1 \parallel AB$ та $A_2B_2 \parallel AB$, то трикутники CA_1B_1 та CA_2B_2 — рівносторонні, а пряма CE виявляється серединним перпендикуляром до A_1B_1 та A_2B_2.



Як відомо, центр описаного кола для будь-якого трикутника є точкою перетину його серединних перпендикулярів. Отже, AM_1, BM_2, CM_3 перетинаються у точці O — центрі описаного кола трикутника ABC. Водночас O є точкою перетину двох серединних перпендикулярів BF і CE трикутника $A_1B_1C_1$, а також точкою перетину двох серединних перпендикулярів AD і CG трикутника $A_2B_2C_2$. Отже, центри описаних кіл трикутників $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ та ABC співпадають.

II тур

1. Пронумеруйте вершини куба натуральними числами 1, 2, 3,…, 8 таким чином, щоб значення сум на кожному ребрі були різними.

Відповідь: це неможливо.

Розв'язок:

Найменше можливе значення суми на ребрі дорівнює 3=1+2, а найбільша 15=7+8. Між 3 та 15 є 13 чисел, з них треба вибрати 12 різних чисел для сум на ребрах куба. Сума всіх значень сум на ребрах дорівнює $(1+2+\dots+8)\cdot 3 = 36\cdot 3 = 108$, оскільки кожна вершина входить до суми тричі. Отже, ці 12 чисел – це числа від 3 до 15 за винятком 9. Єдиний спосіб отримати: 15=7+8; 14=8+6; 13=8+5, оскільки числа 6 і 7 не можуть уже бути поєднаними одним ребром. Тоді число 12=8+4=7+5 отримати ніяк не можна. Значить, це неможливо.

2. Обчисліть значення виразу: $\dfrac{2\cdot 2018}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\dots+\frac{1}{1+2+3+\dots+2018}} - 1.$

Відповідь поясніть.

Відповідь: 2018.

Розв'язок:

$1+2=\frac{2\cdot 3}{2}$; $1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2}$; …; $1+2+\dots+2018=\frac{2018\cdot 2019}{2}$. Тоді

$$\frac{2\cdot 2018}{\frac{2}{2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\dots+\frac{2}{2018\cdot 2019}} = \frac{2018}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{2018\cdot 2019}}$$

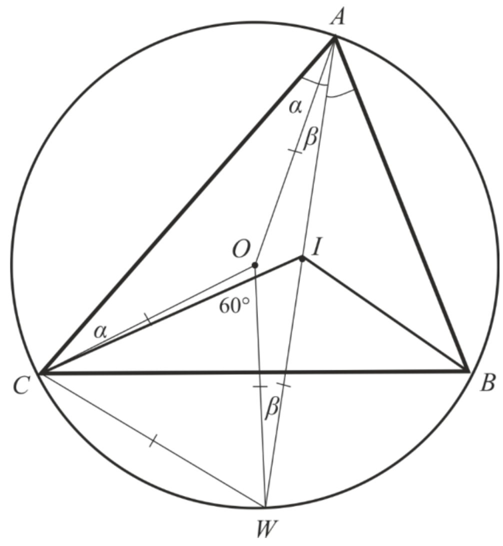
$$= \frac{2018}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}} = \frac{2018}{1-\frac{1}{2019}} = 2019$$

.

Отже, значення шуканого виразу дорівнює 2019−1=2018.

3. У трикутнику *ABC* точка *I* — інцентр (центр вписаного кола). Виявилося, що радіуси описаних кіл трикутників *ABC* та *BIC* рівні. Знайдіть градусну міру кута *BAC*. (*О. Шамович*)

Розв'язок:



Нехай *W* — точка перетину продовження бісектриси *AI* з описаним навколо трикутника *ABC* колом. Як відомо з теореми «трилисника», *BW* = *CW* = *IW*. Отже, точка *W* рівновіддалена від вершин трикутника *BIC*, тобто є для нього центром описаного кола. Нехай *O* — центр описаного кола трикутника *ABC*. Тоді, оскільки радіуси описаних кіл трикутників *ABC* та *BIC* рівні, трикутник *COW* виявиться рівностороннім, а $\angle COW = 60°$. Доведемо далі, що $\angle CAW = 30°$. Для цього з'єднаємо *O* з *A* та позначимо кути при основі рівнобедреного трикутника *AOC* α. Аналогічно кути при основі рівнобедреного трикутника *AOW* позначимо β. Тоді за сумою кутів трикутника *CAW* $(60°+\alpha)+(60°+\beta)+(\alpha+\beta)=180°$, звідки $\alpha+\beta=30°$, тобто $\angle CAW = 30°$. Оскільки *AI* — бісектриса, то $\angle BAC = 60°$.

8 клас

1. Доведіть, що якщо рівняння з цілими коефіцієнтами $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ та $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ мають спільний не цілий корінь, то $p_1 = p_2$ та $q_1 = q_2$.

Розв'язок:

Якщо рівняння з цілими коефіцієнтами $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ має не цілий корінь x_1, то цей корінь є ірраціональним. Дійсно, нехай $x_1 = m/n$ - нескоротний дріб. Тоді $m^2 + p_1mn + q_1n^2 = 0$, а тому m^2 ділиться на n. Але, за нашим припущенням, m и n взаємно прості. Отже, число x_1 ціле. Отримуємо протиріччя, відтак, x_1 - ірраціональне число.

Таким чином, дані рівняння мають спільний корінь $x_1 = a + \sqrt{b}$, де числа a и b раціональні, а число $\sqrt{b}$ ірраціональне. За теоремою Віете другий корінь першого рівняння рівний $-p_1 - a - \sqrt{b}$ та при цьому $q_1 = (a + \sqrt{b})(-p_1 - a - \sqrt{b})$. Відтак, $q_1 = (-p_1 - 2a)\sqrt{b} + r$, де число $r = -ap_1 - a^2 - b$ раціональне. Тому $p_1 = -2a$ та $q_1 = (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$. Аналогічно для чисел p_2 и q_2 ми отримуємо ті ж самі вирази.

2. Шість майже чесних піратів закопали здобуті золоті монети на безлюдному острові та втекли. Через рік перший пірат повернувся на острів, розділив всі монети на шість рівних частин, одна монета виявилась зайвою. Пірат забрав собі одну з частин та зайву монету, а інші закопав. Теж саме зробили по черзі інші пірати, при чому ніхто не знав про дії один одного. Через багато років учений археолог наткнувся на закопані монети. Яку найменшу кількість монет міг знайти археолог?

Розв'язок:

Зауважимо, що після кожного перезакопування число монет ділиться на 5. Нехай археолог знайшов n монет, тоді $n = 5a$.

Отже, шостий пірат знайшов $6a + 1$, що також ділиться на 5, тобто $a \equiv 4 mod(5)$. Тому, $a = 5b - 1$, тобто $6a + 1 = 5(6b - 1)$.

П'ятий знайшов $6(6b - 1) + 1 = 6^2b - 5$. При цьому $6^2b - 5$ ділиться на 5, звідки b ділиться на 5, тобто $b = 5c, 6^2b - 5 = 5(6c^2 - 1)$.

Продовжуючи таким чином, отримаємо, що другий пірат знайшов $6(6^4e - 1) + 1 = 6^5e - 5$. При цьому e ділиться на 5, тобто $e = 5f, 6^5e - 5 = 5(6^5f - 1)$.

Перший пірат знайшов $6^6f - 5$, але це все не важливо.

Таким чином, $b = 5c = \ldots = 5^4f$. Тоді $n = 5a = 5(5b - 1) = 5^6f - 5$. Оскільки $f \geq 1, n \geq 5^6 - 5 = 15620$.

Відповідь. 15620 монет.

3. Довести, що в наведеному нижче масиві чисел немає точного квадрата.

11	111	1111	…
22	222	2222	…
33	333	3333	…
44	444	4444	…
55	555	5555	…
66	666	6666	…
77	777	7777	…
88	888	8888	…
99	999	9999	…

Розв'язок:

Якщо число є точним квадратом, то залишком від ділення такого числа на 4 може бути 0 або 1, тобто $n^2 \equiv 0,1(mod4)$. Виходячи з цього, нам не підходять числа виду 11...11, 22...22, 55...55, 66...66, 99...99 і залишаються числа 33...33, 44...44, 77...77, 88...88.

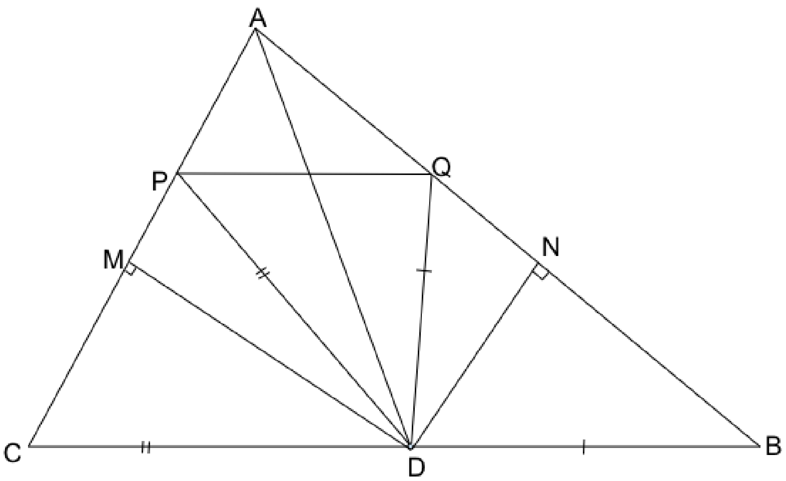
Якщо число є точним квадратом, то при ділені на 10 воно може мати залишки 1, 4, 5, 6 або 9, тобто $n^2 \equiv 1,4,5,6,9(mod10)$. Тому залишаються тільки числа вигляду 44...44, які нам підходять.

Якщо число $A^2 = 44...44$, то воно ділиться на 4, а число A ділиться на 2. Тобто $A = 2B$, де $B^2 = 11...11$,що неможливо виходячи з попередніх міркувань.

Тому жодне з чисел заданого масиву не є точним квадратом.

4. AD - частина діаметра описаного кола навколо трикутника ABC. Точки P та Q розташовані на сторонах AC та AB відповідно так, що $PD = CD$, $QD = BD$. Довести, що $PQ \,//\, BC$. *(О.Черкасский)*

Розв'язок:

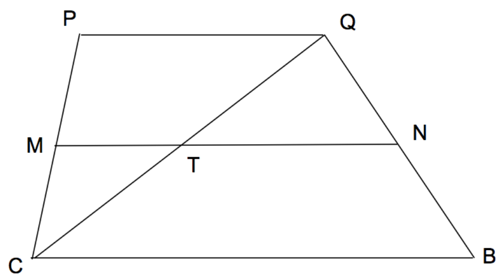


Опустимо на сторони AC та AB перпендикуляри з точки D – DM та DN відповідно.

Тоді точки M, N - середини відрізків PC та QB відповідно. Навколо чотирикутника $AMDN$ можна описати коло.

$\angle NMD = \angle DAB = 90^\circ - \angle C$, $\angle AMN = 90^\circ - (90^\circ - \angle C) = \angle C$, а тому $MN \,//\, BC$.

Розглянемо чотирикутник $PCBQ$.



Точка T - середина CQ. Тому, $MT \,//\, PQ$ та $TN \,//\, BC$, а з цього випливає, що $PQ \,//\, BC$.

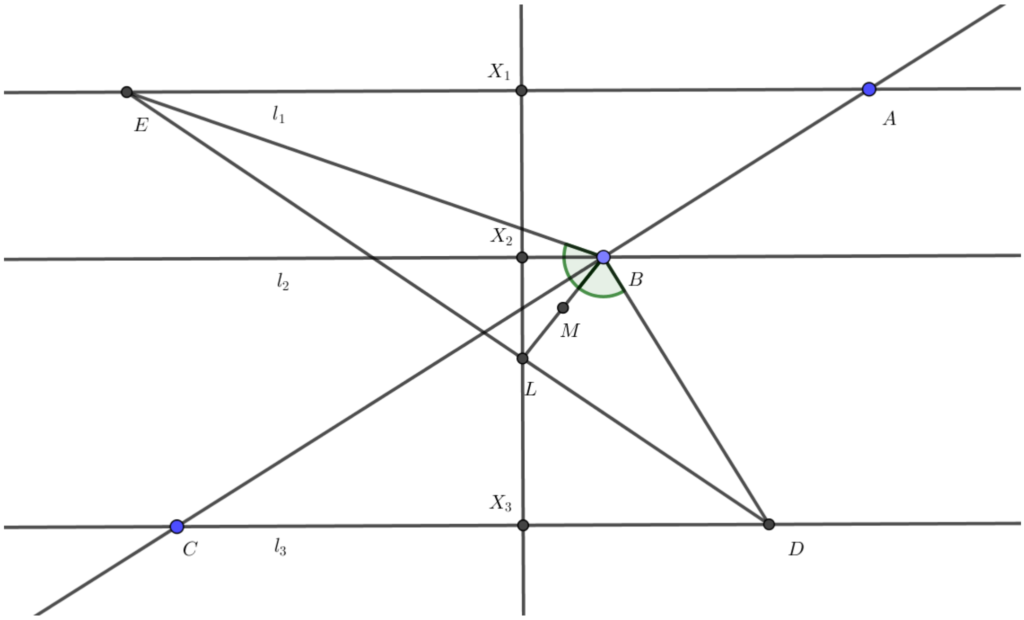
5. Нехай прямі l_1, l_2, l_3 паралельні. Пряма l перетинає l_1, l_2, l_3 у точках *A, B, C* відповідно у вказаному порядку. Точки E та D на прямих l_1 та l_3 відповідно такі, що відрізки $BE=BC$, $AB=DB$. Доведіть, що середина бісектриси BL трикутника BDE знаходиться на однаковій відстані від прямих l_1 та l_3. *(М. Плотников)*

Розв’язок:

Нехай $\frac{LD}{\mathrm{LE}} = k$. Унаслідок властивості бісектриси маємо, що $k = \frac{LD}{\mathrm{LE}} = \frac{BD}{BE} = \frac{BA}{BC}$.Нехай перпендикуляр з точки L до l_1 перетинає прямі l_1, l_2, l_3 у точках X_1, X_2, X_3 відповідно.

За теоремою Фалеса $\frac{X_1X_2}{X_2X_3} = \frac{BA}{BC} = \frac{LD}{\mathrm{LE}} = \frac{LX_3}{LX_1}$. Тоді відрізки X_1X_2 та LX_3 рівні.

Тоді серединні перпендикуляри відрізків X_1X_3 та LX_2 співпадають, паралельні до прямих l_1, l_2, l_3 і проходять через точку *M*.



6. Капітан Флінт заховав скарби у вершинах *B*, *C*, *D* опуклого чотирикутника *ABCD*, а на мапі відмітив точку *A* та три точки перетину бісектрис кутів *B*, *C*, *D* чотирикутника. Чи зможе Джим Гокінс, до рук якого потрапила мапа, знайти ці скарби? *(В. Брайман)*

Розв’язок:

Точки перетину бісектрис дозволяють відновити прямі *b*, *c*, *d*, які містять бісектриси кутів *B*, *C*, *D* відповідно. Побудуємо точку A', симетричну до *A* відносно *b*, точку A'', симетричну до A' відносно *c*, та точку A''', симетричну до A'' відносно *d* (рис. 1*a*). Тоді точка A' належить прямій *BC*, точка A'' належить прямій *CD*, а точка A''' належить прямій *DA*. Якщо точка A''' не збігається з *A*, то можна провести пряму AA''', яка перетинає *d* у точці *D*, симетричну до неї відносно *d* пряму *DC*, яка перетинає *c* у точці *C*, та симетричну до *CD* відносно *c* пряму *BC*, яка перетинає *b* у точці *B*.

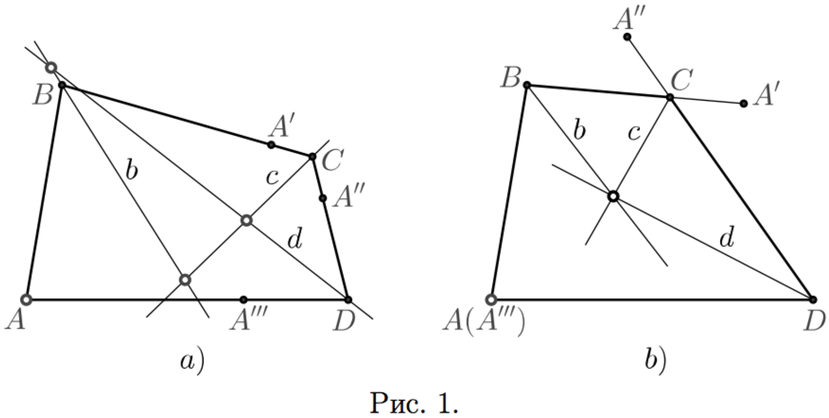


Рис. 1.

Припустимо тепер, що A''' збігається з A, і покажемо, що це неможливо. Нехай для визначеності $AB > BC$ (рис. 1*b*). Тоді точка A' лежить на продовженні відрізка BC за точку C та $CA' = AB - BC$, а точка A'' лежить на продовженні відрізка CD за точку C та $CA'' = CA' = AB - BC$. Тому $DA = DA'' = CD + AB - BC$. Отже, $AB + CD = AD + BC$, чотирикутник $ABCD$ описаний та бісектриси його кутів перетинаються у спільній точці, що суперечить умові задачі. При $AB \leq BC$ міркування цілком аналогічні і теж дістаємо, що чотирикутник $ABCD$ описаний, що суперечить умові.

Зауваження 1. Якщо чотирикутник $ABCD$ описаний, то його не можна відновити за вершиною A та прямими b, c, d, які містять бісектриси кутів B, C, D.

Зауваження 2. У задачнику В.В. Прасолова є така задача:

> *17.29*. Дано n прямых. Постройте n-угольник, для которого эти прямые являются: а) серединными перпендикулярами к сторонам; б) биссектрисами внешних или внутренних углов при вершинах.*

Насправді жоден опуклий n-кутник при жодному n не можна відновити за прямими, які містять бісектриси його кутів.

9-10 клас (командна)

1. У вершинах куба певним чином розташовано вісім послідовних цілих чисел (у кожній вершині по одному числу), а на кожне ребро куба поставлено суму чисел тих вершин, які сполучає дане ребро. Чи можуть всі числа на ребрах бути різними?

Розв'язок:

Ні, не можуть.
По-перше, зауважимо, що оскільки при додаванні до усіх чисел у вершинах деякої константи a усі числа на ребрах збільшуються на однакове значення $2a$. Тому замість розглядання восьми довільних послідовних чисел достатньо розглянути лише числа $0, 1, \dots, 7$; усі інші випадки можна звести до даного.
Припустимо, що усі числа на ребрах виявились різними. При розташуванні у вершинах чисел $0, 1, \dots, 7$ у ребрах можуть знаходитись лише числа з множини $1, 2, \dots, 13$ (усі можливі попарні суми) – усього 13 різних значень. Оскільки у кубі 12 ребер, то лише одне з вказаних значень не використовується для ребер. Знайдемо це значення.
Оскільки в кубі з кожної вершини виходить рівно три ребра, то сума усіх чисел на ребрах дорівнює потроєній сумі усіх чисел у вершинах, тобто $3 \cdot (0 + 1 + \cdots + 7) = 84$. З іншого боку, $1 + 2 + \cdots + 13 = 91 = 84 + 7$. Таким чином, на ребрах куба не присутнє число 7, а всі інші зазначені числа присутні.
Спробуємо розташувати інші числа, починаючи з найбільшого.
Число 13 можна одержати лише як суму $13 = 7 + 6$, тому вершини 7 та 6 мають бути поєднані ребром.
Число 12 можна одержати лише як суму $12 = 7 + 5$ (оскільки усі числа у вершинах є різними), а тому вершини 7 та 5 також повинні бути поєднані ребром.
Число 11 можна одержати як суми $11 = 7 + 4 = 6 + 5$. Однак з двох попередніх пунктів випливає, що вершини 5 та 6 не можуть бути поєднані ребром, оскільки вони обидва суміжні з вершиною 7, а у кубі нема трикутників з ребер. Таким чином, для 11 залишається один варіант, і вершини 7 та 4 також повинні бути поєднані ребром.
Число 10 можна одержати як суми $10 = 7 + 3 = 6 + 4$. Але бачимо, що вершини 6 та 4 не можуть бути поєднані ребром, оскільки вони суміжні з вершиною 7, а вершина 7 не може бути поєднана ребром із вершиною 3, оскільки вона вже має трьох сусідів – вершини 4, 5 та 6.
Отже, ми дійшли до протиріччя, а тому наше припущення, що усі числа на ребрах є різними, виявилось некоректним.

2. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – довільні ненульові дійсні числа, сума яких дорівнює нулю. Позначимо $m = \min_i |x_i|$, $M = \max_i |x_i|$. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq n\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right).$$

Розв'язок:

Розглянемо функцію $f(x) = x - \frac{mM}{x}$. На відрізку $x \in [m; M]$ ця функція є монотонно зростаючою (як сума двох монотонно зростаючих функцій), а тому $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$, або $m - M \leq f(x) \leq M - m$. Аналогічно доводиться, що така оцінка виконується і для $x \in [-M; -m]$. Таким чином, для усіх x таких, що $m \leq |x| \leq M$, справедливо, що $|f(x)| \leq M - m$.
Розглянемо суму значень $f(x)$ у точках $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$f(x_1)+\cdots+f(x_n)=x_1+\cdots+x_n-mM\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)=-mM\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right),$$

а тому

$$\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right|=\frac{1}{mM}|f(x_1)+\cdots+f(x_n)|\le\frac{1}{mM}(|f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)|)\le$$
$$\le\frac{1}{mM}\cdot n(M-m),$$

звідки й випливає твердження задачі.

3. Нехай p', q' – такі різні прості непарні числа, що числа $p=2p'+1$ та $q=2q'+1$ також є простими, і $n=pq$. Позначимо через $f(x)=x^{65537}\ mod\ n$. Доведіть, що серед чисел з множини $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ існує рівно дев'ять таких, для яких виконується рівність $f(x)\ =\ x$.

Розв'язок:

Розглянемо співвідношення $x^{65537}\equiv x\ (mod\ p)$. Воно має один очевидний розв'язок $x=0$; інші розв'язки задовольнятимуть співвідношенню

$$x^{65536}=x^{2^{16}}\equiv 1\ (mod\ p).$$

За Малою теоремою Ферма для довільного лишка $x\ne 0$ за модулем p справедливо

$$x^{p-1}=1\ (modp).$$

Скористаймось тим відомим фактом, що якщо $d=\text{НСД}(a,b)$, то існують такі цілі числа u,v, що $d=au+bv$. Відповідно, якщо $x^a\equiv 1\ (mod\ p)$ та $x^b\equiv 1\ (mod\ p)$, то

$$x^d=x^{au+bv}=(x^a)^u\cdot(x^b)^v\equiv 1\ (mod\ p)$$

Оскільки $\text{НСД}(65536,\ p-1)=\text{НСД}(2^{16},2p')=2$, то маємо, що для наших x повинно виконуватись $x^2\equiv 1\ (mod\ p)$. Але дане порівняння за простим модулем має лише два розв'язки: 1 та -1.
Таким чином, співвідношення $x^{65537}\equiv x\ (mod\ p)$ має лише три розв'язки: 0, 1 та –1. Аналогічно три розв'язки має співвідношення $x^{65537}\equiv x\ (mod\ q)$. Тому рівність $f(x)=x$ (яка визначається за модулем n) за китайською теоремою про лишки буде мати рівно дев'ять розв'язків, що й треба було довести.

Зауваження. 1) Визначені в умові задачі числа p', q' носять назву *чисел Софі Жермен*, а числа p, q – *сильних простих чисел*. Сильні прості числа мають важливе значення для криптографії; зокрема, введена у задачі функція $f(x)$ є частковим випадком шифруючої функції криптосистеми RSA, однієї з найпопулярніших криптосистем у світі. Використання сильних простих чисел дозволяє мінімізувати у цій системі кількість «нерухомих точок» – таких повідомлень x, які після шифрування не змінюються (тобто, $f(x)=x$).
2) Наявність у співвідношення $x^{2^{16}}\equiv 1\ (mod\ p)$ тільки двох розв'язків можна довести й іншим чином, використовуючи деякі відомості про квадратичні лишки за простим модулем. Дійсно, якщо взяти квадратний корінь з обох частин, то ми одержимо два випадки:

$x^{2^8} \equiv 1\ (mod\ p)$ та $x^{2^8} \equiv -1\ (mod\ p)$. Але число –1 не є квадратичним лишком за модулем даного виду, оскільки його символ Лежандра дорівнює

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{p'} = -1.$$

Таким чином, другий випадок не має розв'язків, а перший, знову-таки, має лише два розв'язки, +1 та –1, до яких ми застосовуємо аналогічні міркування, доки степінь порівняння не понизиться до першої.

4. На честь дня народження видатного математика Леонарда Ойлера (яке припадає на 15 квітня) міжнародна математична спільнота вирішила випустити криптовалюту «ойлеркойн». У даній криптовалюті повинні бути монети номіналом 1 ойлеркойн та α^k ойлеркойнів для довільного натурального k. Математики бажають обрати значення $\alpha > 1$ так, щоб усі монети мали ірраціональні номінали (окрім 1-го ойлеркойну), але при цьому довільну суму у натуральну кількість ойлеркойнів можна було б одержати наявними номіналами, використовуючи кожен з номіналів не більш ніж t разів, де $t \geq 3$ – фіксоване натуральне число. Чи зможуть математики виконати свій задум?

Розв'язок:

Звісно, що можуть, це ж математики. ☺
Підберемо число α таким чином, щоб виконувалось співвідношення

$$(t+1)\alpha^k = \alpha^{k+1} + \alpha^{k+2}$$

Бачимо, що α є розв'язком квадратного рівняння $x^2 + x - (t+1) = 0$, звідки $\alpha = \frac{-1+\sqrt{4t+5}}{2}$ (інший розв'язок не підходить через обмеження $\alpha > 1$).
Зауважимо, що довільну натуральну суму ойлеркойнів можна одержати монетами у 1 ойлеркойн. Після цього, застосовуючи наведене співвідношення, можна замінювати кожні $(t+1)$ монету одного номіналу на дві монети вищих номіналів; загальна кількість монет при цьому буде лише зменшуватись. Отже, за скінченну кількість кроків нам вдасться одержати довільну суму в ойлеркойнах, використовуючи будь-який номінал не більш ніж t разів.
Якщо число $4t+5$ не є повним квадратом, то α є ірраціональним числом і з біному Ньютона випливає, що α^k буде ірраціональним для довільного натурального k. Однак, якщо $4t+5$ є повним квадратом (скажімо, при $t=5$), вказаний метод побудови номіналів не задовольняє одній з вимог. Тоді ми будемо підбирати α як розв'язок рівняння

$$(t+1)\alpha^k = 2\alpha^{k+1} + \alpha^{k+2},$$

звідки $\alpha = -1 + \sqrt{t+2}$. У даному випадку ми будемо замінювати кожну $(t+1)$ монету одного номіналу на три монети вищих номіналів, що все одно приводить до загального зменшення кількості монет, а тому за скінченну кількість кроків нам вдасться одержати те, що потрібно.
Неважко показати, що числа $4t+5$ та $t+2$ не можуть одночасно бути повними квадратами. Дійсно, якщо $4t+5 = a^2$ та $t+2 = b^2$, то маємо

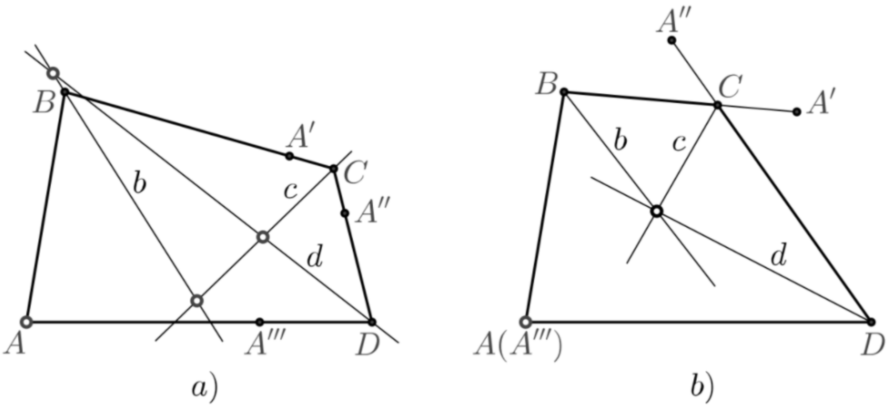
$$4b^2 = 4t + 8 = a^2 + 3,$$
$$3 = 4b^2 - a^2 = (2b+a)(2b-a),$$

отже, $2b - a = 1$ та $2b + a = 3$, звідки $a = b = 1$. Але тоді $t = -1$, що неможливо. Таким чином, одне з двох наведених значень α повністю задовольняє усім вимогам математиків.

5. Капітан Флінт заховав скарби у вершинах B, C, D опуклого чотирикутника ABCD, а на мапі відмітив точку А та три точки перетину бісектрис кутів B, C, D чотирикутника. Чи зможе Джим Гокінс, до рук якого потрапила мапа, знайти ці скарби? *(В. Брайман)*

Розв'язок:

Точки перетину бісектрис дозволяють відновити прямі *b, c, d*, які містять бісектриси кутів *B, C, D* відповідно. Побудуємо точку A', симетричну до A відносно b, точку A'', симетричну до A' відносно с, та точку A''', симетричну до A'' відносно d (рис. 1а). Тоді точка A' належить прямій BC, точка A'' належить прямій CD, а точка A''' належить прямій DA. Якщо точка A''' не збігається з A, то можна провести пряму AA''', яка перетинає d у точці D, симетричну до неї відносно d пряму DC, яка перетинає с у точці C, та симетричну до CD відносно с пряму BC, яка перетинає b у точці B.



Припустимо тепер, що A''' збігається з A, і покажемо, що це неможливо. Нехай для визначеності $AB > BC$ (*рис. 1b*). Тоді точка A' лежить на продовженні відрізка BC за точку C та $CA' = AB - BC$, а точка A'' лежить на продовженні відрізка CD за точку C та $CA'' = CA' = AB - BC$. Тому $DA = DA'' = CD + AB - BC$. Отже, $AB + CD = AD + BC$, чотирикутник $ABCD$ описаний та бісектриси його кутів перетинаються у спільній точці, що суперечить умові задачі. При $AB \leq BC$ міркування цілком аналогічні і теж дістаємо, що чотирикутник $ABCD$ описаний, що суперечить умові.

Зауваження 1. Якщо чотирикутник $ABCD$ описаний, то його не можна відновити за вершиною A та прямими *b, c, d*, які містять бісектриси кутів *B, C, D.*

Зауваження 2. У задачнику В.В. Прасолова є така задача:

17.29*. Дано n прямых. Постройте n-угольник, для которого эти прямые являются: а) серединными перпендикулярами к сторонам; б) биссектрисами внешних или внутренних углов при вершинах.

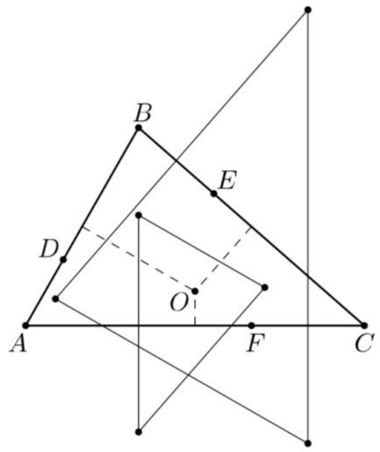
Насправді жоден опуклий n-кутник при жодному n не можна відновити за прямими, які містять бісектриси його кутів.

6. На сторонах *AB, BC* та *CA* трикутника *ABC* відмітили точки *D, E* та *F* відповідно так, що *AD : DB = BE : EC = CF : F A = 1 : 2*. Сторони трикутника T_1 належать серединним перпендикулярам до *AD, BE* та *CF*, а сторони трикутника T_2 — серединним перпендикулярам до *DB, EC* та. Знайти відношення площ $S(T_1) : S(T_2)$. *(В. Брайман)*

Відповідь: $S(T_1) : S(T_2) = 4$.

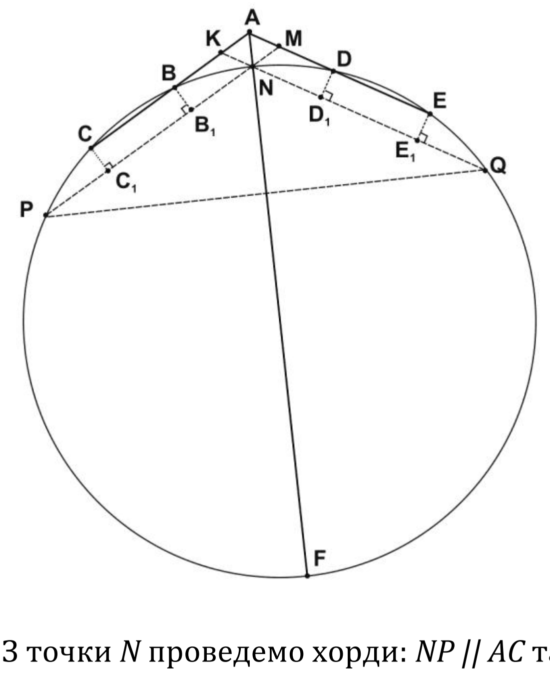
Розв'язок

Нехай *O* — центр описаного кола трикутника *ABC* (рис. 2). Серединні перпендикуляри до *AD* та *DB* знаходяться по різні сторони від серединного перпендикуляра до *AB* на відстанях ½*DB* та ½*AD* від нього. Тому серединний перпендикуляр до *AD* переходить у серединний перпендикуляр до *DB* при гомотетії з центром *O* та коефіцієнтом *–AD/DB = –1/2*. Аналогічно серединні перпендикуляри до *BE* та *CF* переходять у серединні перпендикуляри до *EC* та *FA* при гомотетії з центром *O* та коефіцієнтом –1/2. Отже, трикутник T_1 переходить у трикутник T_2 при зазначеній гомотетії, звідки $S(T_1) : S(T_2) = 4$.



7. Через точку *A* до кола проведено три січні *A-B-C, A-N-F, A-D-E* так що точки *B, C, D, E, N, F* лежать на колі та кути *CAF* та *FAE* дорівнюють 60°. Доведіть рівність *AB + AC + AD + AE = AN + AF*. *(О. Черкасський)*

Доведення.



З точки *N* проведемо хорди: *NP || AC* та *NQ || AE*. Продовжимо їх та отримаємо два рівносторонніх трикутника *AMN* та *AKN* зі сторонами рівними *2x*

Проведемо перпендикуляри CC_1 та BB_1 до *NP*, DD_1 та EE_1 до *NQ*. Отримуємо $PC_1 = B_1N = t$ та $QE_1 = D_1N = q$. Також проведемо висоти з вершини *N* в трикутниках *NKA* та NMA_1. Ці висоти поділять сторони *AK* та *AM* на відрізки довжиною x.

Розглянемо трикутнику NPQ. Точка F э перетином бісектриси з описаним колом, тобто серединою дуги PQ (точкою W), тому $NF = (NP + NQ)/2cos60 = NP + NQ$.

Отже, $AB = x + t, AC = x + t + CB, AD = x + q, AE = x + q + DE$.
Тобто, $AC + AB + AE + AD = 4x + 2t + 2q + CB + DE = 4x + (2t + C_1B_1) + (2q + D_1E_1) =$
$=4x + (NP + NQ) = 2x + 2x + NF = 2x + (2x + NF) = AN + AF.$

8. Дано трикутник ABC, описане навколо нього коло та центр вписаного кола. Не використовуючи циркуль за допомогою лінійки (без ділень) побудувати центроїд (точка перетину медіан) трикутника ABC. *(Г. Філіпповський)*

Розв'язок
Нехай I – даний центр вписаного кола. Проведемо прямі AW_1, BW_2, CW_3 через точку I до перетину з описаним колом в точках W_1, W_2, W_3. Нехай W_2W_1 та W_3W_1 перетинають відповідно сторони AC та AB у точках T і K. Проведемо CK і BT, нехай вони перетинаються у точці F_1. Аналогічно будуємо точки F_2 та F_3. Проведемо прямі AF_1, BF_2, CF_3, які перетнуться у шуканій точці.

Пояснення. Легко довести що TK паралельно до BC. Тобто $CTKB$ – трапеція. AF_1 за властивістю трапеції проходить через середини основ TK та BC, тобто співпадає з медіаною трикутника ABC.