XVIII международная олимпиада по математике Русановского лицея.

<u>6 класс</u>

I Тур

1. 2013 шариков раскрасили в 7 цветов радуги. На каждом шаре написали общее количество шаров такого же цвета, как этот. Чему может быть равна сумма чисел, обратных написанным?

<u>Решение</u>:

На каждом шарике написано число шариков данного цвета x. Число, обратное к нему, 1/n. Всего слагаемых вида 1/n ровно n по количеству. Тогда сумма слагаемых для шариков каждого цвета равна 1. А всего цветов 7.

<u>Ответ</u>: 7

2. Профессор Плюс очень любит пончики. В Пончиковом городе он зашел в 40 магазинов и в каждом он действовал по такой схеме: покупал в очередном магазине 6 пончиков, затем делил все имеющиеся у него к тому моменту пончики на равные кучки и одну из кучек съедал. Известно, что, посетив последний магазин, он разделил пончики на 6 кучек, а в съеденной им кучке оказалось 6 пончиков. Сколько всего пончиков съел Профессор Плюс, если до начала посещения магазинов у него пончиков не было?

<u>Решение</u>:

В 40 магазинах Профессор Плюс купил 240 пончиков. После последней покупки у него было 36 пончиков, из которых 6 он съел, а 30 оставил. Значит, всего он съел 240 – 30 = 210 пончиков.

<u>Ответ</u>: 210 пончиков

3. Сумма трех различных положительных нечетных чисел равна 89. Известно, что в каждой паре этих чисел одно из них делится на другое. Найти эти числа.

<u>Решение</u>:

Все числа, а значит, и их сумма 89 , делятся на меньшее из них. Но 89 – простое число, поэтому наименьшее из этих трех чисел 1, а сумма двух оставшихся – 88. 88 = 8 x 11. Поэтому наименьшее из этих двух чисел – 11. (1 не может быть по условию, а других нечетных делителей у числа 88 нет). Третье число равно 88 – 11 =77.

<u>Ответ</u>: 1, 11, 77

4. Девять голодных белок за час набирают корзину орехов и наедаются досыта. Сытые белки орехов не едят, поэтому набирают корзину за час вшестером. Сколько голодных белок можно накормить досыта корзиной орехов?

<u>Решение</u>:

За час сытая белка набирает 1/6 корзины, а голодная – 1/9 корзины. Следовательно, голодная белка съедает за час 1/6 – 1/9 = 1/18 часть корзины и наедается досыта. Значит, одной корзиной орехов можно накормить 18 белок.

<u>Ответ</u>: 18

5. Украинские ученые предложили новую шкалу температур. Повышение температуры на 1° по-украински равносильно повышению на 1,2° по Цельсию. Температура 10° по-украински — это все равно, что 20°С. Какая температура выражается одинаковым числом градусов по-украински и по Цельсию?

Решение: Обозначим неизвестное число градусов через х, тогда

$$1{,}2(x-10)=x-20; \quad 0{,}2x=-8; \quad x=-40.$$

Ответ: – 40°С

2 Тур

1. Из пунктов А и В навстречу друг другу одновременно выезжают велосипедисты Алеша и Боря с одинаковыми постоянными скоростями. Через некоторое время из пункта А в пункт В на автомобиле с постоянной скоростью выезжает Вася. Через 20 минут он догоняет Алешу, еще через 20 минут встречает Борю, а еще через 25 минут приезжает в пункт В. Во сколько раз скорость автомобиля превышает скорость велосипедистов?

Решение:

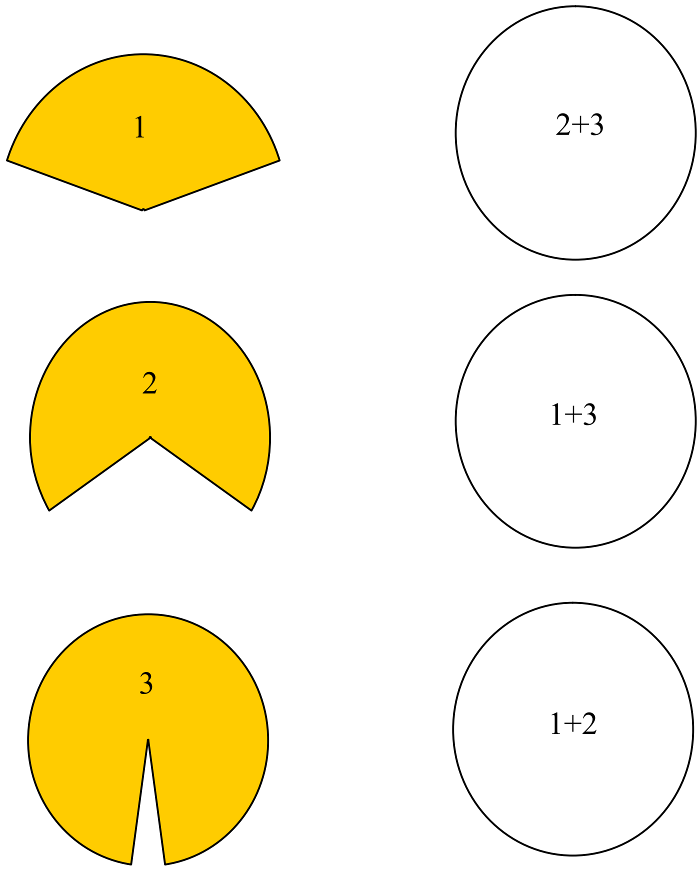
От А до В Вася ехал 65 минут. Пусть все расстояние составляло 65 частей. Тогда скорость Васи – 1 часть в минуту. В момент встречи Васи и Алеши они находятся на расстоянии 20 частей от А, а Боря – в 20 частях от В. Расстояние между Борей и Васей – 25 частей. За 20 следующих минут Вася проехал 20 частей, значит, Боря – 5. Поэтому скорость Бори в 4 раза меньше, чем скорость Васи.

Ответ: В 4 раза

2. Трехголовый Змей Горыныч праздновал свой день рождения. Его головы лакомились по очереди именинными пирогами и за 15 минут съели два одинаковых пирога. Известно, что каждая голова ела столько времени, сколько понадобилось бы двум другим, чтобы вместе съесть такой же пирог. За сколько минут три головы Змея Горыныча съели бы вместе один пирог?

Решение:

Желтыми закрашены пироги, которые реально были съедены, белым – те, которые могли бы быть съедены в тоже время. Номера на пирогах указывают на ту голову(ы), которая ела пирог.



Если все головы ели одновременно, они съели бы 5 пирогов.

Найдем, сколько пирогов съедят все три головы вместе за 15 минут. Первая голова ела столько времени, сколько понадобилось двум другим головам, чтобы вместе съесть целый пирог. Значит, все три головы вместе съели бы за это время на один пирог больше. Аналогично получаем, что за время, в течение которого вторая голова ела пироги, все три головы вместе съели бы на 1 пирог больше. То же самое получается и для третьей головы. Таким образом, за 15 минут все три головы съели бы на 3 пирога больше, то есть 5 пирогов. Отсюда получаем, что один пирог они съели бы за 3 минуты.

Ответ: 3 минуты

3. На день рождения пришло 12 детей в возрасте 6 лет, 7 лет, 8 лет, 9 лет и 10 лет. Четыре ребенка имели возраст 6 лет, а восьмилетних было больше всех. Определите средний возраст 12 детей.

Решение

Так как число детей младшего возраста равно 4, то число восьмилетних может быть не менее 5. Если их больше 5, то шести и восьмилетних будет больше 9. Тогда на детей возрастов 7 лет, 9 лет и 10 лет останется в сумме только или 1 год или 2 года. Этого быть не может. Значит восьмилетних детей ровно 5 человек. Остаток от 12 составит 3 ребенка. Их надо распределить между возрастами 7 лет, 9 лет и 10 лет. Легко понять, что их ровно по одному человеку.

Получаем следующий расклад:

6 лет — 4 человека
7 лет — 1 человек
8 лет — 5 человека
9 лет — 1 человека
10 лет — 1 человека

Найдем теперь средний возраст — среднее арифметическое имеющихся возрастов. Напомним, что средним арифметическим нескольких чисел называют результат деления их суммы на их количество. Вычисляем его так:

$$\frac{6\cdot 4+7\cdot 1+8\cdot 5+9\cdot 1+10\cdot 1}{12}=7{,}5$$

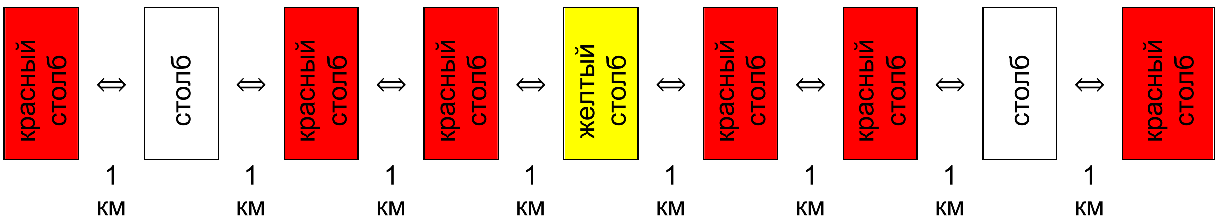
<u>*Ответ*</u>: 7,5 лет.

7 класс.
I тур.

1. Вдоль железной дороги стоят километровые столбы на расстоянии 1 км друг от друга. Один из них покрасили в желтый цвет и шесть – в красный. Сумма расстояний от желтого столба до всех красных равна 14 км. Чему может быть равно максимальное расстояние между красными столбами?

Решение:

Заметим, что минимальная сумма расстояний от желтого столба до четырех красных равна 6 км и это возможно только в одном случае: и слева, и справа от желтого столба ближайшие два столба подряд – красные. Значит, максимальная сумма расстояний от желтого столба до двух красных не превосходит 14 – 6 = 8 км. Поэтому и максимальное расстояние между красными столбами не превосходит 8 км, причем случай 8 км возможен.



Ответ: 8 км.

2. Даны два числа. Если первое из них увеличить на 1, а второе уменьшить на 1, то их произведение увеличится на 2013. Как изменится их произведение, если первое число уменьшить на 1, а второе – увеличить на 1?

Решение:

Обозначим данные числа x и y. Тогда по условию

$(x+1)(y-1)-xy=2013,\ \ y-x-1=2013, y-x=2014.$

Рассмотрим разность

$(x-1)(y+1)-xy=xy-y+x-1-xy=-(y-x)-1=-2014-1=-2015.$

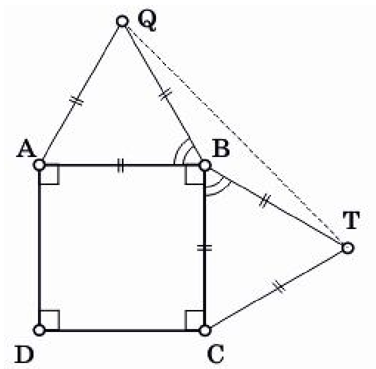
Ответ: уменьшится на 2015.

3. Простым или составным является число $2^{10}+5^{12}$?

Решение:

$$2^{10}+5^{12}=(2^5)^2+(5^6)^2+2\cdot 2^5\cdot 5^6-2\cdot 2^5\cdot 5^6=$$
$$=(2^5+5^6)^2-(2^3\cdot 5^3)^2=$$
$$=(2^5+5^6+2^3\cdot 5^3)(2^5+5^6-2^3\cdot 5^3).$$

То есть, данное число раскладывается на множители, каждый из которых, очевидно, не равен 1. Следовательно, данное число составное.



Ответ: составное.

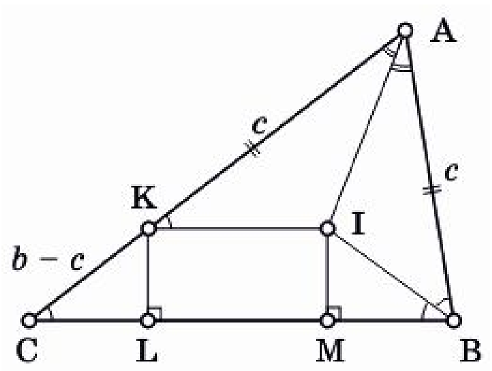
4. На сторонах AB и BC квадрата ABCD во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники AQB и BTC. Весь рисунок, кроме точек Q и T, стерли. Восстановите первоначальный квадрат.(А. Медведев)

Решение: Нетрудно подсчитать, что $\angle QBT = 150^0$. Поскольку QB=BT, то $\angle BQT =$ $= \angle BTQ = 15^0$. (рис. 1) Тогда, проведя из точек Q и T лучи под углами 15^0, получим в пересечении точку B. Учитывая то, что $\angle QBA = \angle TBC = 60^0$, получим вершины A и C. Засечки из вершин A и C, равные стороне квадрата, дадут недостающую вершину D.

5. Для треугольника ABC известно, что ∠ABC = 2∠ ACB. Докажите, что BI = AC –AB, где I — инцентр треугольника ABC. (М. Плотников)

Решение:

Отложим на стороне AC = b заданного треугольника ABC от вершины A отрезок AK, равный стороне AB = c (рис. 2). Тогда CK = b – c. Соединим точку K с инцентром I.



Заметим, что треугольники ABI и AKI равны по двум сторонам и углу между ними, поскольку AI — биссектриса $\angle CAB$, а стороны AB и AK равны по построению. Тогда $\angle ABI = \angle AKI$ и, более того, поскольку по условию $\angle ABC = 2\angle ACB$, а BI — биссектриса $\angle ABC$, $\angle AKI = \angle ACB$. Следовательно, KI ∥ BC.

Опустим из точек K и I перпендикуляры на сторону BC (поскольку KI ∥ BC, то перпендикуляры равны KL = IM). Получим пару равных прямоугольных треугольников: $\Delta CKL = \Delta BIM$ по катету и острому углу. А значит, равны также и их гипотенузы: BI = CK = b – c, что и требовалось доказать.

II тур

1. Трехголовый Змей Горыныч праздновал свой день рождения. Его головы по очереди лакомились именинными пирогами и за 15 минут съели два одинаковых пирога. Известно, что каждая голова ела столько времени, сколько понадобилось бы двум другим, чтобы вместе съесть один такой же пирог. За сколько минут три головы Змея Горыныча вместе съели бы один пирог?

Решение: см. решение задачи №2 II Тур 6 класс.

2. В автобусе имеются одноместные и двухместные сидения. Кондуктор заметил, что когда в автобусе сидело 13 человек, то 9 сидений были полностью свободными, а когда сидело 10 человек, то полностью свободными были 6 сидений. Сколько сидений в автобусе? (если на двухместном сидении сидит хотя бы один человек, то сиденье считается занятым)

Ответ: 16 сидений.

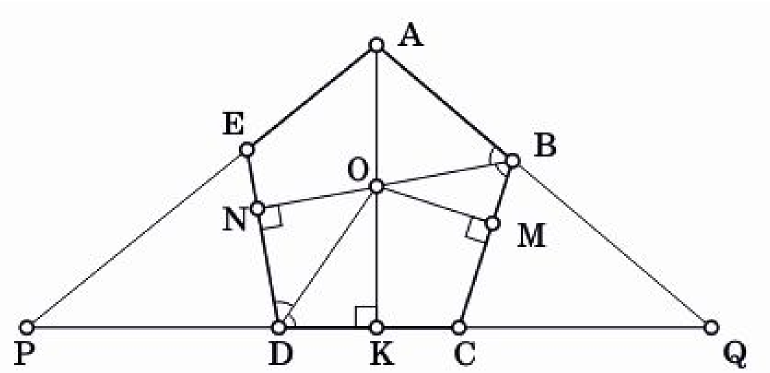
Решение:

В первом случае наименьшее количество занятых сидений равно 7, а наибольшее – 13. Во втором случае наименьшее количество занятых сидений равно 5, а наибольшее – 10. Таким образом, если x – количество всех сидений в автобусе, то, учитывая свободные сидения, выполняются неравенства: $7 + 9 \le x \le 13 + 9$ и $5 + 6 \le x \le 10 + 6$. То есть, $16 \le x \le 22$ и $11 \le x \le 16$. Отсюда единственным возможным значением x является 16, причем оно может достигаться только тогда, когда в первом случае занято максимальное количество двухместных сидений, а во втором случае занято максимальное количество одноместных. Проверяем: в первом случае 13 человек заняли 6 двухместных и одно одноместное сидение, оставив 9 одноместных сидений свободными; во втором случае, 10 человек заняли 10 одноместных сидений, оставив 6 двухместных сидений свободными. То есть, условие задачи выполняется, если в автобусе шесть сидений – двухместных и десять сидений – одноместных.

3. В описанном пятиугольнике ABCDE стороны BC, CD и DE равны. K — точка касания вписанной окружности данного пятиугольника со стороной CD, а O — центр этой окружности. Докажите, что точки A, O, K лежат на одной прямой. (М. Плотников)

Решение:

Очевидно, что CK = CM, DN = DK, где M и N — точки касания вписанной в пятиугольник окружности с его сторонами BC и DE соответственно (рис. 3). Поскольку отрезки BC, CD и DE равны, то DN = DK = BM. Прямоугольные треугольники OMB и OKD равны по двум катетам, а значит $\angle ABC = \angle CDE$ (поскольку центр вписанной окружности O — точка пересечения биссектрис внутренних углов пятиугольника). Аналогично покажем, что $\angle BCD = \angle DEA$.



Продлим стороны AB и AE до пересечения с прямой CD в точках Q и P соответственно. Полученные треугольники QBC и PDE равны по стороне и двум прилежащим углам. Отсюда $\angle APQ = \angle AQP$.

Поскольку треугольник APQ — равнобедренный (AQ=AP), то биссектриса его угла A совпадает с высотой, проведенной из этой же вершины. А значит, точки A, O, K принадлежат одной прямой.

8 класс.

1. Докажите, что число 11…1122…22 (состоящее из 100 единиц и 100 двоек) является произведением двух последовательных натуральных чисел.

Решение:

Имеем $12 = 3 \cdot 4, 1122 = 33 \cdot 34$. Покажем, что это равенство верно для любых чисел такого типа. Обозначим число 1…11 с n единичками через a. Тогда $11 \dots 1122 \dots 22 = a \cdot 10^n + 2a$, причем $10^n = 9a + 1$. Значит, $11 \dots 1122 \dots 22 = a(9a + 1) + 2a = 9a^2 + 3a = 3a(3a + 1)$ – произведение двух последовательных чисел. Заметим, что $3a = 3 \dots 33$, $3a + 1 = 3 \dots 34$.

Ответ: числа 3…33 и 3…34 (по 100 цифр в каждом).

2. Для действительных чисел x и y выполняется равенство:

$\left(x + \sqrt{x^2 + 2013}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 2013}\right) = 2013$. Найдите $x + y$.

Решение:

Умножим обе части данного равенства на $\left(x - \sqrt{x^2 + 2013}\right)$. После преобразований получаем $x + y = \sqrt{x^2 + 2013} - \sqrt{y^2 + 2013} = a$. Аналогично, умножив обе части исходного равенства на $\left(y - \sqrt{y^2 + 2013}\right)$, мы получим $x + y = \sqrt{y^2 + 2013} - \sqrt{x^2 + 2013} = -a$. Теперь, сложив полученные равенства, мы получим, что $x + y = 0$

Ответ: $x + y = 0$

3. Построим последовательность квадратных трехчленов с целыми коэффициентами вида $x^2 + a_i x + b_i$ следующим образом: коэффициенты a_i, b_i предыдущего трехчлена будут корнями следующего. Известно, что на некотором шаге очередной многочлен совпал с первым. Сколько различных многочленов может быть в этой последовательности?

Решение:

Задачу лучше начать решать на примере. Пусть, скажем, $P_1 = x^2 + 2x + 1$, т.е. $a = 2, b = 1$. Многочлен с такими корнями имеет вид $P_2 = (x - 2)(x - 1) = x^2 - 3x + 2$. Соответственно, $P_3 = (x + 3)(x - 2) = x^2 + x - 6$, $P_4 = (x - 1)(x + 6) = x^2 + 5x - 6, \dots$

На этом примере видно, что коэффициент при x меняется довольно прихотливо, а вот свободный член многочленов довольно быстро растет по абсолютной величине. Исследуем этот факт в общем виде.

По теореме Виета имеем $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$. Значит, $b_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} \cdot b_{n-1} = \dots = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_1 \cdot b_1$. Из условия $b_{n+1} = b_1$ следует, что $b_1 = 0$ или $a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_1 = 1$.

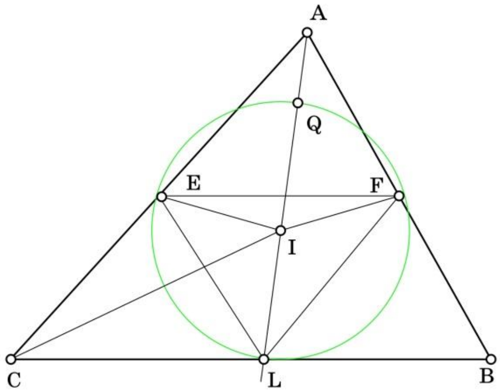
По той же теореме Виета $a_{n+1} = -(a_n + b_n)$, откуда $b_n = -a_{n+1} - a_n$. Значит, b_n может принимать значения 0, 2 (при $a_n = -1$) или -2 (при $a_n = 1$). Рассмотрим все найденные случаи.

Вариант	**Трехчлен 1**	**Трехчлен 2**	**Трехчлен 3**
$b = 0$	$x^2 + ax$	$x^2 - ax$	$x^2 + ax$
$a = 1, b = -2$	$x^2 + x - 2$	$x^2 + x - 2$	$x^2 + x - 2$
$a = -1, b = 2$	$x^2 - x + 2$	$x^2 - x - 2$	$x^2 + 3x + 2$

В первом варианте повторение трехчленов начинается с 3-го. Во втором варианте повторение начинается со второго (последовательность постоянна). Третий вариант не дает решения.

Ответ: 1 или 2.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса угла A до пересечения со стороной в точке L. Точки E и F на сторонах AC и AB соответственно взяты так, что EF || BC и CE + FB = BC. Через точки E, L, F проведена окружность, которая пересекает AL в точке Q. Докажите, что точка Q – инцентр (точка пересечения биссектрис) треугольника AEF.(А.Николаев, О.Ревако)



Решение:

По свойству биссектрисы $\frac{CL}{LB} = \frac{AC}{AB}$. По теореме Фалеса, т.к. EF || CB, то $\frac{CE}{FB} = \frac{AC}{AB}$.

Тогда $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{CL}}{\mathrm{LB}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{FB}}$, а так же по условию $\mathrm{CE} + \mathrm{FB} = \mathrm{BC}$, следовательно CL = CE и LB = FB.

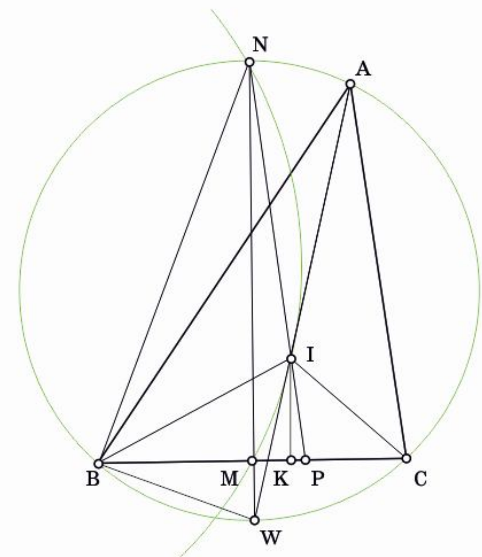
Треугольник ΔLCE – равнобедренный, значит угол $\angle \mathrm{CLE} = 90° - \frac{\mathrm{C}}{2}$. Аналогично, $\angle \mathrm{BLF} = 90° - \frac{\mathrm{B}}{2}$

Тогда угол $\angle \mathrm{ELF} = 90° - \frac{\mathrm{A}}{2}$.

Четырехугольник ELFQ — вписанный в окружность. Следовательно, угол $\angle \mathrm{EQF} = 180° - \angle \mathrm{ELF} = 180° - \left(90° - \frac{\mathrm{A}}{2}\right) = 90° + \frac{\mathrm{A}}{2}$. Тогда точка Q – инцентр треугольника ΔAEF.

5. В треугольнике ABC точка N – середина дуги BAC, I – центр вписанной окружности треугольника ABC, M – середина стороны BC. Докажите, что угол BIM равен углу, образованному прямыми NI и CI. (М.Плотников)

Решение:



W – середина дуги противоположной к *BAC*, а *P* – точка пересечения *NI* и *BC*. Тогда *W*, как и *N*, принадлежит серединному перпендикуляру стороны *BC*.

Угол $\angle$NBW опирается на диаметр, поэтому он прямой.

Поскольку BN – высота в прямоугольном треугольнике, выполняется следующее равенство:

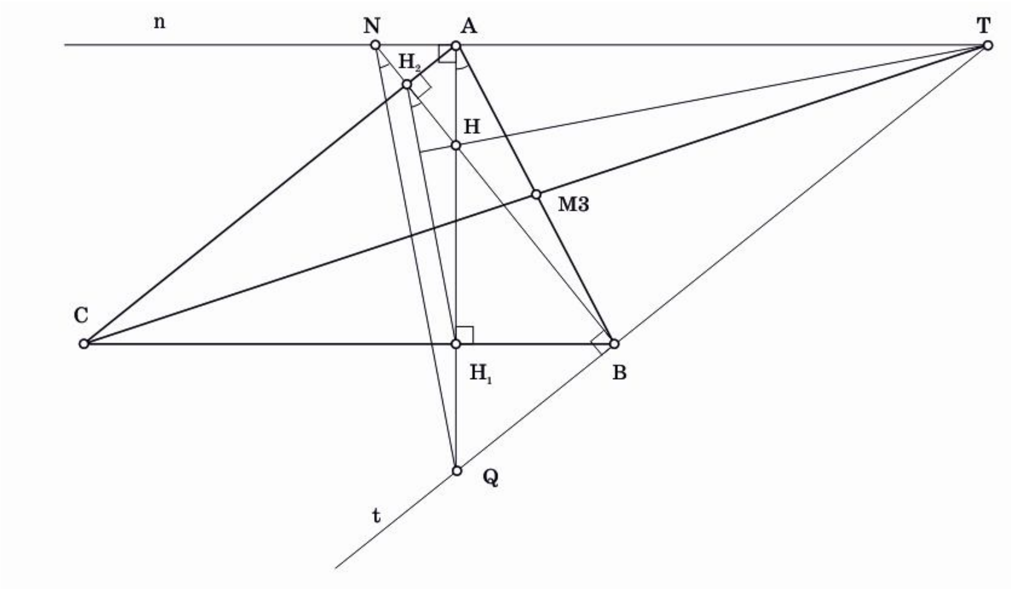
$$\mathrm{WB}^2 = \mathrm{WM} \cdot \mathrm{WN}$$

Поскольку WB=WI (согласно теореме о трилистнике), то

$$\mathrm{WI}^2 = \mathrm{WM} \cdot \mathrm{WN}$$

Опишем окружность около треугольника ΔNIM, тогда WI будет ее касаться. Следовательно, углы $\angle$MIW=$\angle$MNI. Пусть вписанная окружность треугольника ΔABC касается BC в точке K, тогда углы $\angle$KIP=$\angle$MNP=$\angle$MIW. Согласно теореме о дважды биссектрисе, углы $\angle$CIK=$\angle$WIB (W – центр описанной окружности треугольника ΔBCI). Поэтому углы $\angle$CIP и $\angle$BIM равны.

6. В треугольнике ABC удвоили медиану CM_3 и получили точку T. Точки H_1, H_2 – основания высот, проведенных из вершин A, B соответственно, H – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Докажите, что прямые TH и H_1H_2 перпендикулярны. (А.Карлюченко)



Решение:

Проведем через A прямую n, параллельно BC. И через точку B прямую t, параллельно AC.

Пусть точка Q – точка пересечения прямых AH_1 и t, а N – точка пересечения прямых BH_2 и n.

Точки N, A, B, Q лежат на окружности, с диаметром NQ. Поэтому $\angle QNB = \angle QAB$.

Но и точки A, H_2, H_1, B лежат на окружности с диаметром AB. Поэтому $\angle QAB = \angle H_1H_2B$. Следовательно, $\angle QNB = \angle H_1H_2B$. А тогда $H_1H_2 \parallel NQ$.

В треугольнике ΔNTQ QA и NB – высоты и H – ортоцентр. Тогда прямая TH совпадает с третьей высотой, т.е. $TH \perp NQ$ и $TH \perp H_1H_2$.

Командная олимпиада 9-10 классов

1. В ячейках квадратной таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «–». За один шаг можно в одной строке или в одном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что за несколько шагов можно получить таблицу из одних плюсов. Докажите, что это можно сделать не более чем за n шагов.

Решение:

Очевидно, что если инвертировать по одному разу все строки и все столбцы (причём в любом порядке), то содержимое таблицы не поменяется: каждая клетка инвертируется дважды, т.е. вернётся в исходное состояние. Также очевидно, что при двойном инвертировании одного столбца или одной строки не произойдёт ничего, поэтому если среди наших шагов встречаются пары повторяющихся, их можно удалить.

Предположим, что таблица из плюсов была получена из исходной за k неповторяющихся шагов. Если $k \le n$, то утверждение задачи доказано. Если же $k > n$, то рассмотрим дополнительные $2n-k$ шагов, состоящих из инвертирования тех строчек и столбцов, которые до этого не были затронуты. Очевидно, что после выполнения дополнительных шагов мы снова получим исходную таблицу; следовательно, применяя эти шаги в обратном порядке к исходной таблице, мы получим таблицу из плюсов. Учитывая, что $2n-k<n$, получаем снова утверждение задачи.

2. Пусть n и m – некоторые натуральные числа.

а) Сравните числа $\dfrac{(m+n)^{m+n}}{(m+n)!}$ и $\dfrac{m^m n^n}{m!n!}$.

б) Сравните числа $\dfrac{(m+n)^{m+n}}{(m+n)!}$ и $\dfrac{m^n n^m}{m!n!}$.

Решение.

По биному Ньютона имеем: $(m+n)^{m+n} = \sum\limits_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k m^{m+n-k} n^k > C_{m+n}^t m^{m+n-t} n^t$ для произвольного $0 \le t \le m+n$. Подставляя $t=n$, $t=m$ и учитывая, что $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n = \dfrac{(m+n)!}{m!n!}$, получаем, что число $\dfrac{(m+n)^{m+n}}{(m+n)!}$ будет больше как $\dfrac{m^m n^n}{m!n!}$, так и $\dfrac{m^n n^m}{m!n!}$.

3. Докажите, что для произвольного действительного x и произвольного натурального n справедливо неравенство:

$$|cos\, x| + |cos\, 2x| + |cos\, 4x| + ... + |cos\, 2^n x| \ge \frac{n}{4}.$$

Можно ли усилить это неравенство?

Решение.

Покажем, что для произвольного x верно неравенство $|\cos x| + |\cos 2x| \ge \dfrac{1}{2}$. Действительно, если $|\cos x| \ge \dfrac{1}{2}$, то данное неравенство очевидно верно; если же $|\cos x| < \dfrac{1}{2}$, то тогда $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 < -\dfrac{1}{2}$, откуда $|\cos 2x| > \dfrac{1}{2}$ и неравенство снова верно.

Применяя последовательно данное неравенство, получим:

$\left|cos\,x\right|+\left|cos\,2x\right|\geq\frac{1}{2}$, $\left|cos\,4x\right|+\left|cos\,8x\right|\geq\frac{1}{2}$, $\left|cos\,16x\right|+\left|cos\,32x\right|\geq\frac{1}{2}$, …, $\left|cos\,2^{2k}x\right|+\left|cos\,2^{2k+1}x\right|\geq\frac{1}{2}$,

откуда для произвольного k будет верно следующее неравенство:

$$\left|cos\,x\right|+\left|cos\,2x\right|+\left|cos\,4x\right|+\ldots+\left|cos\,2^{2k}x\right|+\left|cos\,2^{2k+1}x\right|\geq\frac{k+1}{2}.$$

Если $n=2k+1$, то $\left|cos\,x\right|+\left|cos\,2x\right|+\ldots+\left|cos\,2^{n}x\right|\geq\frac{n+1}{4}>\frac{n}{4}$; если же $n=2k+2$, то имеем:

$$\left|cos\,x\right|+\left|cos\,2x\right|+\ldots+\left|cos\,2^{n}x\right|\geq\left|cos\,x\right|+\left|cos\,2x\right|+\ldots+\left|cos\,2^{n-1}x\right|\geq\frac{(n-1)+1}{4}=\frac{n}{4}.$$

Неравенство доказано.

Данное неравенство можно усилить. Действительно, обозначим $t=\cos x$, тогда $\left|cos\,x\right|+\left|cos\,2x\right|=\left|t\right|+\left|2t^{2}-1\right|$. Исследуя функцию $f(t)=\left|t\right|+\left|2t^{2}-1\right|$ на интервале $[-1;1]$, можно убедиться, что её минимум достигается при $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (см. для иллюстрации график), откуда получаем, что $\left|cos\,x\right|+\left|cos\,2x\right|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда, в свою очередь, выводится такое неравенство:

$$\left|cos\,x\right|+\left|cos\,2x\right|+\left|cos\,4x\right|+\ldots+\left|cos\,2^{n}x\right|\geq\frac{n}{2\sqrt{2}}.$$

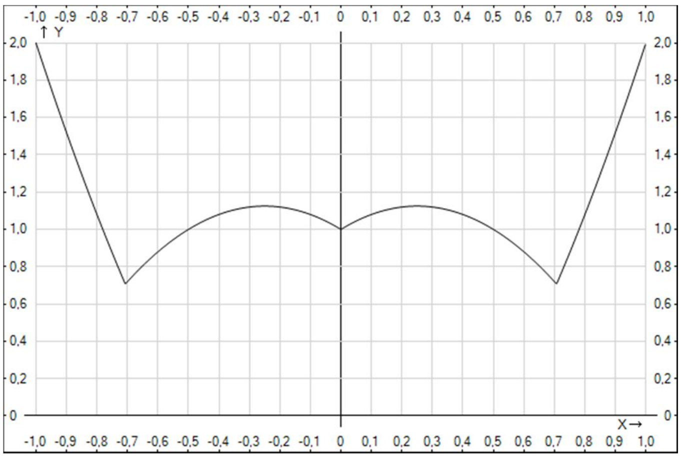


График функции $f(t)=\left|t\right|+\left|2t^{2}-1\right|$

4. Полиномы с действительными коэффициентами $P(x)$, $Q(x)$ и $T(x)$, один из которых – второй степени, а два других – третьей, связаны между собой соотношением $(P(x))^{2}+(Q(x))^{2}=(T(x))^{2}$. Докажите, что все корни одного из полиномов третьей степени – действительные числа.

Решение:

Из равенства полиномов следует, что полиномом второй степени является либо $P(x)$, либо $Q(x)$; пусть для определённости $\deg P = 2$. Будем считать, что коэффициенты при x^3 у $Q(x)$ и $T(x)$ положительны. Тогда из равенства

$$(P(x))^2 = (T(x))^2 - (Q(x))^2 = (T(x) - Q(x))(T(x) + Q(x))$$

следует, что $deg(T - Q) = 1$, т.е. что $T(x) - Q(x) = r(x - x_1)$, где $r > 0$. Отсюда $(P(x))^2$ делится на $(x - x_1)$ и, соответственно, на $(x - x_1)^2$, а значит, $T(x) + Q(x)$ тоже делится на $(x - x_1)$. Поскольку $T(x) - Q(x)$ и $T(x) + Q(x)$ делятся на $(x - x_1)$, то $Q(x)$ и $T(x)$ тоже делятся на $(x - x_1)$ и, следовательно, имеют один действительный корень x_1.

Пусть $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, $Q(x) = (x - x_1)Q_1(x)$, $T(x) = (x - x_1)T_1(x)$. Подставляя эти значения в условие задачи, получаем $a^2(x - x_1)^2 = (T_1(x) - Q_1(x))(T_1(x) + Q_1(x))$, откуда $T_1(x) - Q_1(x) = y = const > 0$. Следовательно, $a^2(x - x_1)^2 = y(y + 2Q_1(x))$, или, что то же самое, $Q_1(x) = \dfrac{a^2}{2y}(x - x_1)^2 - \dfrac{y}{2}$. Легко показать, что $Q_1(x)$ имеет два действительных корня. Следовательно, $Q(x)$ будет иметь три действительных корня, что и требовалось доказать.

В случаях отрицательных коэффициентов и коэффициентов разных знаков при x^3 у $Q(x)$ и $T(x)$ вместо них рассматриваются полиномы $(-Q(x))$ и/или $(-T(x))$.

5. Считается, что ученик А учится не хуже ученика В, если по каждому предмету оценка А не меньше оценки В. Если про двух учеников нельзя сказать, что один из них учится не хуже другого, то говорят, что они несравнимы.

По каждому из 2n школьных предметов ученики получили оценки «11» или «12», причём не нашлось двух учеников, получивших одинаковые оценки по каждому предмету. Каково наибольшее возможное количество учеников может быть попарно несравнимо между собой?

Решение:

Обозначим через X множество попарно несравнимых учеников максимально большого размера и выделим в этом множестве подмножество Y учеников, которые имеют наименьшее количество k оценок «12». Покажем, что $k \ge n$. Действительно, пусть $k < n$; рассмотрим множество Z таких учеников, каждый из которых имеет ровно $k+1$ оценку «12» и при этом учится лучше одного из учеников из Y. Подсчитаем количество всех возможных пар учеников (z, y), где $z \in Z$ учится лучше, чем $y \in Y$. С одной стороны, это количество равно $(2n - k) \cdot |Y|$, потому что для каждого y найдётся $(2n-k)$ учеников из Z, которые учатся лучше него; с другой стороны, это количество будет равно $(k+1) \cdot |Z|$, потому что для каждого z найдётся $(k+1)$ ученик из Y, который учится хуже него. Таким образом, имеем:

$$(k+1) \cdot |Z| = (2n - k) \cdot |Y| > (k+1) \cdot |Y| \quad \Rightarrow \quad |Z| > |Y|.$$

Следовательно, если из множества X удалить подмножество учеников Y и включить в него подмножество учеников Z, мы получим множество попарно несравнимых учеников бóльшего размера, что противоречит предположению максимальности X. Следовательно, у всех учеников из X не меньше n оценок «12». Аналогично показывается, что у них и не больше n оценок «12» – то есть, этих оценок будет ровно n.

Таким образом, множество X будет состоять из C_{2n}^n попарно несравнимых учеников, имеющих по n оценок «11» и «12».

Примечание.

Данная задача тесно связана с такими комбинаторными объектами, как шпернеровы множества.

Рассмотрим множество А мощности $2n$ элементов. Плотной цепочкой называется система подмножеств $\varnothing = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_{2n-1} \subset B_{2n} = A$. Легко показать, что $|B_i| = i$, откуда выводится, что общее количество плотных цепочек на множестве А совпадает с числом перестановок его элементов и равно $(2n)!$. Таким же образом показывается, что через произвольное подмножество $C \subseteq A$ мощности k проходит $k!(2n-k)!$ плотных цепочек.

Шпернерова система множеств – набор $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ непустых подмножеств *A*, ни одно из которых не является подмножеством другого. Обозначим $|X_i| = x_i$; тогда верно следующее неравенство (*теорема Шпернера*): $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_{2n}^{x_i}} \le 1$. Действительно, рассмотрим все плотные цепочки, проходящие через множества X_i; поскольку ни одна цепочка не может пройти через два множества системы (иначе одно из множеств будет включаться в другое), то их общее количество равно $\sum_{i=1}^{m} x_i!(2n-x_i)!$, и в то же время оно не будет больше, чем общее количество плотных цепочек, то есть $(2n)!$, откуда и следует утверждение теоремы Шпернера.

Поскольку для биномиальных коэффициентов верно неравенство $C_{2n}^{x} \le C_{2n}^{n}$, то мы можем получить оценку для числа *m* – количества множеств в шпернеровой системе (так называемое *неравенство Ямамото*). Имеем:

$$1 \ge \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_{2n}^{x_i}} \ge \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_{2n}^{n}} = \frac{m}{C_{2n}^{n}}.$$

Таким образом, шпернерова система множеств над *A* имеет максимальный размер $m = C_{2n}^{n}$, и при этом все входящие в систему подмножества будут состоять ровно из *n* элементов.

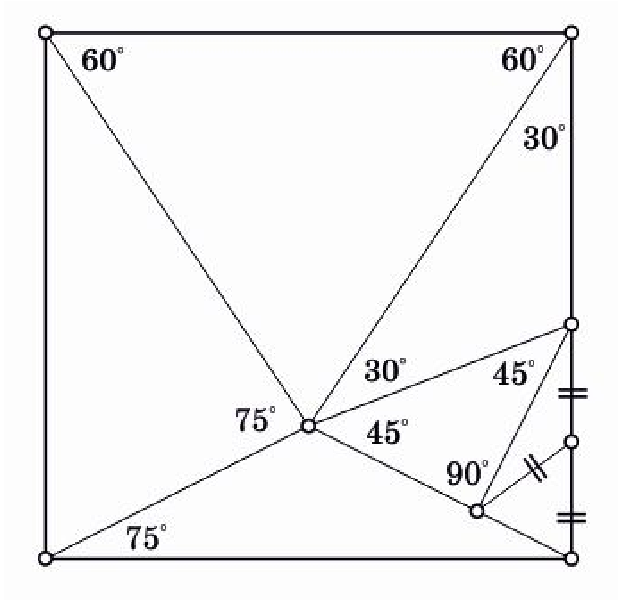
Переформулируем условие исходной задачи. Пусть X_i – множество предметов, по которым ученик *i* получил «12»; тогда ученик *i* учится лучше, чем ученик *j*, если $X_i \supset X_j$. Следовательно, любому набору учеников, которые попарно несравнимы, можно сопоставить систему множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$, которая будет шпернеровой. Таким образом, согласно неравенству Ямамото, наибольшее количество попарно несравнимых учеников будет равно C_{2n}^{n}.

6. Можно ли разрезать квадрат на попарно неравные равнобедренные треугольники? (М. Рожкова)

Решение. Можно. Один из вариантов приведён на рисунке.

7. Квадрат со стороной 1 разрезан на сотню прямоугольников одинакового периметра р. Каково наибольшее возможное значение р?

Решение:



Если разрезать прямоугольник на сто прямоугольников размерами 0.01×1, то получим значение $p = 2.02$. Покажем, что это максимально возможное значение.

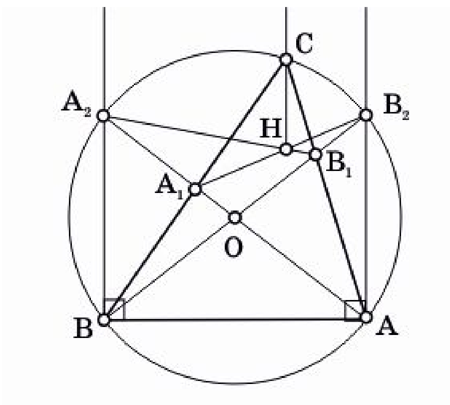
Очевидно, что стороны всех прямоугольников должны быть параллельны сторонам квадрата. Выберем из всех прямоугольников прямоугольник размерами $a\times b$ ($a \le b \le 1$) минимальной площади; тогда $ab \le 0.01$. Предположим, что $p = 2(a+b) > 2.02$. Из того, что $b \le 1$ получаем, что $a > 0.01$ и $0 \le b-a < 0.99$. Тогда

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 > \frac{1.01^2 - 0.99^2}{4} = 0.01.$$

Получили противоречие.

8. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Прямые AO и BO пересекают стороны BC и AC в точках A_1 и B_1, а описанную окружность – в точках A_2 и B_2 соответственно. Прямые A_1B_2 и B_1A_2 пересекаются в точке H. Докажите, что $CH \perp AB$.(В. Подхалюзин)

Решение:



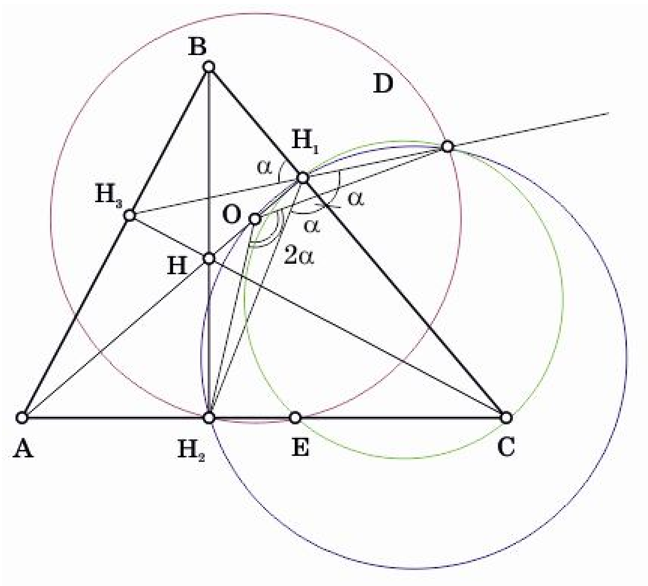
Рассмотрим теорему Папа для прямых *AO*, *BO* и точек A, A_1, A_2 и B, B_1, B_2. Так как прямые A_1B_2 и B_1A_2 пересекаются в точке *H*, а прямые AB_1 и BA_1 – в точке *C*, то прямые AB_2, BA_2 и *CH* пересекаются в одной точке или параллельны друг другу. Легко показать, что прямые AB_2 и BA_2 перпендикулярны прямой *AB* (поскольку углы A_2BA и B_2AB опираются на диаметр) и поэтому параллельны; следовательно, прямая *CH* тоже им параллельна и, соответственно, перпендикулярна *AB*.

Данное решение было предложено участником олимпиады Е. Диомидовым.

9. В треугольнике ABC проведены высоты AH_1, BH_2 CH_3. На луче H_3H_1 за точкой H_1 выбрана некоторая точка D. Описанная окружность треугольника DH_1C пересекает отрезок AC в точке E. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEH_2 лежит на высоте AH_1.(Д. Хилько)

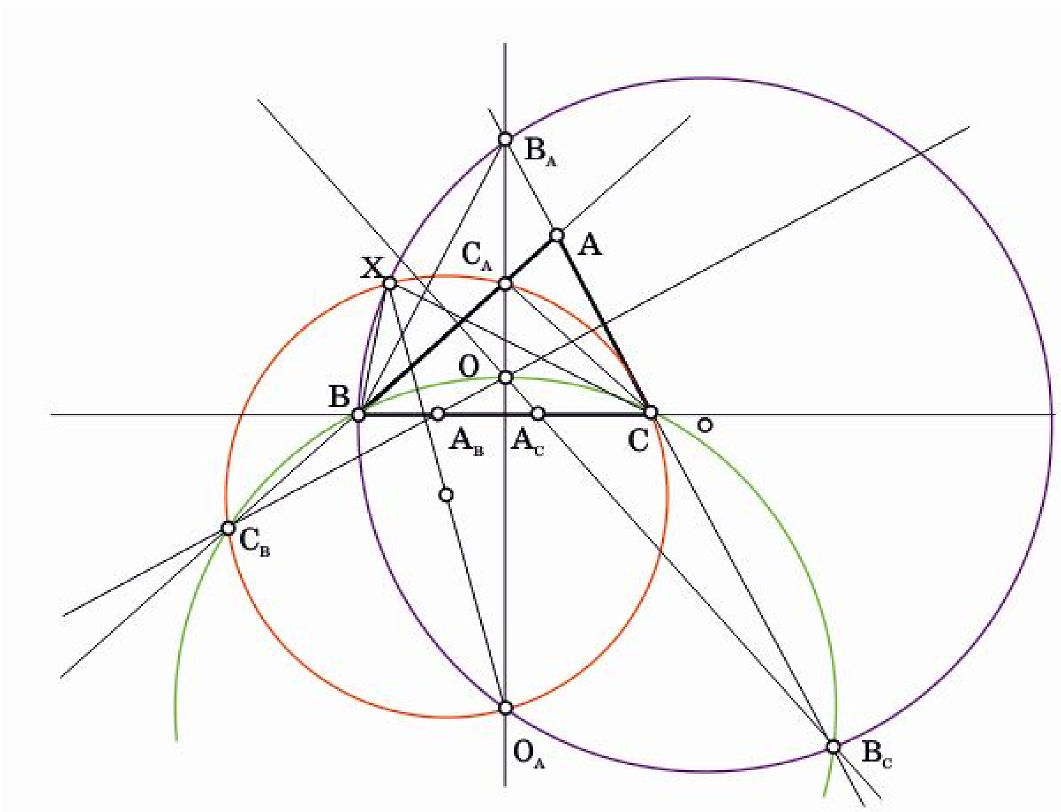
Решение:

Пусть описанная окружность треугольника DH_1H_2 пересекает высоту AH_1 в точке *O*. Покажем, что эта точка является центром описанной окружности треугольника DEH_2. Поскольку $\angle H_3H_1B = \angle H_2H_1C = \angle DH_1C = A$, то $\angle DH_1H_2 = \angle DOH_2 = 2A$. Более того, поскольку AH_1 является биссектрисой угла $\angle H_3H_1H_2$ и, соответственно, внешней биссектрисой треугольника DH_1H_2, то точка *O* является серединой дуги DH_1H_2, откуда $OD = OH_2$.



Поскольку $\angle DEC = \angle DH_1C$, то $\angle DEA = 180 - A$, и, так как больший угол $\angle DOH_2$ равен $360 - 2A$, следовательно, точка *E* будет лежать на окружности с центром в точке *O* и радиуса *OD*. Отсюда следует утверждение задачи.

10. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне BC пересекает прямые AC и AB в точках B_A и C_A соответственно; аналогично определяются точки A_B, C_B и B_C, A_C. Докажите, что описанные окружности треугольников AA_BA_C, BB_AB_C и CC_AC_B пересекаются в одной точке, которая лежит на описанной окружности треугольника ABC. (М. Плотников)



Решение:

Заметим, что точки B_C и C_B лежат на окружности, описанной около треугольника BCO. Действительно, углы BC_BO и CB_CO равны $90° - \angle A$ откуда следует, что их сумма равна половине величины дуги BC окружности OBC.

Пусть O_A, O_B, O_C – центры окружностей *BOC, COA, AOB*. Углы BO_AO и BB_CB_A равны $180° - 2\angle A$, значит, равны между собой, а точка O_A принадлежит окружности, описанной около треугольника BB_AB_C; аналогично доказывается, что точка O_A принадлежит окружности, описанной около треугольника CC_AC_B.

Допустим, что окружности BB_AB_C и CC_AC_B повторно пересекаются в точке X. Углы BB_AO_A и BXO_A, CXO_A и CC_AO_A опираются на одни дуги BOA и COA окружностей BB_AB_C и CC_AC_B соответственно, сумма которых равна дуге BC окружности BAC. Поэтому точка X лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.