XXII олімпіада з математики Русанівського ліцею

6 клас

І тур

1. У крамниці Алі-Баби продавалися два мішки рису: 1-го та вищого ґатунку на однакову загальну суму грошей. Один кілограм риса першого ґатунку коштував 20 динарів, а вищого – 30. Але мішки при переносці порвалися і весь рис змішався. Але на щастя проходив його товариш математик, який підрахував по якій ціні за кілограм необхідно продавати «змішаний» рис. По якій?

Розв'язання:

Нехай ціна за кожен мішок рису – x. Тоді сумарна вартість – $2x$. Тоді сумарна вага рису першого ґатунку – $\frac{x}{20}$, а другого – $\frac{x}{30}$. Тоді, якщо розділимо всю вартість на всю масу, отримаємо ціну за кілограм «змішаного» рису, тобто:

$$\frac{2x}{\frac{x}{20}+\frac{x}{30}} = \frac{2x}{\frac{3x}{60}+\frac{2x}{60}} = \frac{120x}{5x} = 24 \text{ динара.}$$

Відповідь: 24 динара за кілограм.

2. Гришко та Іринка по черзі їдять сунички: Гришко їсть одну, потім Іринка їсть дві, Гришко – три і так далі кожного наступного разу на одну суничку більше або, якщо не вистачає ягід для необхідної кількості, всі, що залишилися. Виявилось, що Гришко куштував сунички останнім і разом з'їв 101 штуку. Скільки ягід скуштували друзі разом?

Розв'язання:

Легко помітити, що Гришко їв лише непарну кількість суничок можливо, крім останнього разу. Тоді $1 + 3 + 5 + \ldots + 19 = 100$, що означає, що останнього разу хлопчик з'їв ще одну ягідку. Тобто Іринка куштувала лише парну кількість суничок, тобто $2 + 4 + 6 + \ldots + 20 = 110$. Тобто загальна кількість ягід – 211.

Відповідь: 211 суничок.

3. Шерлок Холмс знайшов п'ять монет номіналом в 1, 2, 3, 5 та 10 динарів. Він швидко визначив, що одна з них фальшива, тобто цифра на монеті не відповідає її масі в грамах. А як знайти фальшиву монету за три зважування на чашкових терезах без важків?

Розв'язання:

Перше зважування: $2 + 3 + 5$ та 10.

Якщо вага рівна, то 1 – фальшива. Якщо не рівна, то переходимо до другого зважування.

Друге зважування: $2 + 3$ та 5.

Якщо вага рівна, то 10 – фальшива. Якщо ж ні, то із першого зважування ми знаємо, що 10 – справжня, тобто ми знаємо фальшива легша чи важча за номінал. Без обмеження загальності будемо вважати, що фальшива легша. Якщо тепер 5 легша, то вона є фальшивою. Якщо ж ні – то переходимо до третього зважування.

Третє зважування: $1 + 2$ та 3.

Якщо 3 легша, то 3 – фальшива. Якщо ж ні, то 2 – фальшива.

4. На дошці виписані підряд цифри від 9 до 1. Дозволяється між деякими з них розставити знак «+», а інші склеїти, після чого рахуємо значення цього виразу (наприклад, $98 + 7 + 65 + 432 + 1 = 603$). Яке найбільше тризначне число можна отримати такими діями?

Розв'язання:

$9 + 8 + 7 + 654 + 321 = 999$, що очевидно є найбільшим тризначним числом.

Відповідь: 999.

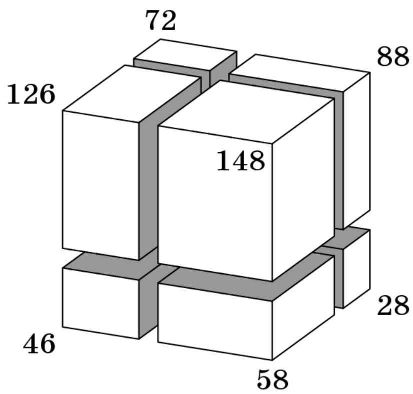
5. В школі 250 учнів та 125 парт. Рівно половина дівчат сидять за партою з хлопцем. Чи можна пересадити учнів так, щоб половина хлопців сиділа за однією партою з дівчатами?

Розв'язання:

Помітимо, що кількість дівчат – парна, бо за умовою половина сидить за партами з хлопцями. Також помітимо, що і половина дівчат – парна кількість, бо вони сидять по двоє. Що означає, що кількість дівчат ділиться на 4 націло. Якщо ж можна пересадити учнів так, як сказано в умові, то, з аналогічних міркувань, і кількість хлопців повинна буде ділитися на 4. Це означає, що загальна кількість дітей повинна ділитися на 4, але 250 на 4 не ділиться, тобто так пересадити не можливо.

Відповідь: не можна.

II тур



6. Дерев'яний брусок трьома розпилами розпилили на вісім менших брусків. На рисунку у семи брусків вказана їх площа поверхні (в см^2). Яка площа поверхні восьмого бруска?

Розв'язання:

Можна помітити, що площа поверхні всього куба рівна сумі площ поверхонь брусків з площею 72, 148, 46 та 28. А також сумі інших чотирьох брусків. Нехай площа 8-го бруска рівна x. Тоді $x + 58 + 126 + 88 = 72 + 148 + 46 + 28$ (повна поверхня куба однакова, тобто не залежить від способу її підрахування). Тоді $x = 22$.

Відповідь: 22 см^2.

7. Батьки Сашка купили дві свічки до дня народження однакової висоти, але одна з них згорає за чотири години, а інша – за дві (свічки різної товщини). Коли Сашко загадав бажання та загасив свічки, то одна була в три рази нижче за іншу. Скільки часу щасливі родичі вітали хлопчину?

Розв'язання:

Нехай за час горіння товста свічка зменшилась на x, тоді тонка зменшилась на $2x$. Візьмемо висоту свічки за 1, тоді маємо рівняння:

$1 - x = 3(1 - 2x)$,

розв’язуючи яке отримуємо, що $x = 0{,}4$ години, тобто 24 хвилини.

Відповідь: 24 хвилини.

8. В дивовижній країні в Дивному магазині можна виконати дві операції:

1) обміняти 5$ на 3 € та цукерку.

2) обміняти 2 € на 3 $ та цукерку.

Зайшовши з деякою сумою доларів (без євро) Незнайко провів декілька операцій та вийшов з іншою сумою доларів та 50 цукерками (без євро). Скільки коштували йому ці цукерки?

Розв’язання:

Так як хлопчик заходив без євро та вийшов без євро, це означає, що деяку кількість доларів він поміняв на євро і всі євро, які отримував, поміняв на долари. Тоді помітимо, що отримувати євро Незнайко може по 3, а віддає лише по 2. Тобто для того, щоб у нього не залишилося євро кількість перших операцій повинна була бути парною і без обмеження загальності можемо замінити першу операцію на третю:

3) обміняти 10$ на 6 € та 2 цукерки.

Але тоді для кожної третьої операції необхідно буде виконати колись 3 рази другу операцію, тобто можемо замінити її на 4-ту:

4) обміняти 6 € на 9 $ та 3 цукерки.

Це означає, що маючи 10$ Незнайко повинен для отримання цукерок виконати 3-тю та 4-ту операції, тобто отримати 9$ та 5 цукерок. А всього він отримав 50 цукерок, тобто 3-тю та 4-ту операції виконав $50 : 5 = 10$ разів, при чому кожного разу кількість доларів вменшувалася на 1$. Це означає, що загальна вартість цукерок рівна $10 \cdot 1\$ = 10\$$.

Відповідь: 10$.

7 клас

І тур

1. Цілі числа a, b, c і d задовольняють рівність $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Доведіть, що число abc ділиться націло на 4.

Розв'язання:

Квадрат парного числа ділиться націло на 4, а квадрат непарного числа дає остачу 1 при діленні на 4. Якщо числа a, b, c – непарні, то d^2 має давати остачу 3 при діленні на 4, що неможливо. Якщо серед чисел a, b, c два непарних і одне парне, то d^2 має давати остачу 2 при діленні на 4, що також неможливо. Отже, серед чисел a, b, c є хоча б два парних. Значить добуток abc ділиться на 4. Такі числа існують, наприклад, $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$.

2. На прямій відмітили 100 різних точок. Для кожної точки обчислили суму відстаней від даної точки до всіх інших. Чи можуть всі 100 отриманих чисел бути різними?

Розв'язання:

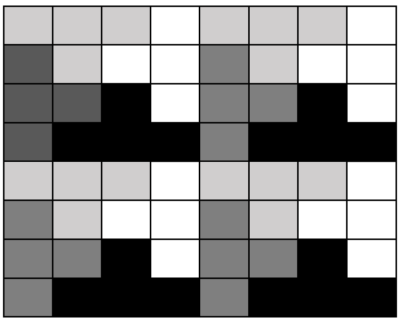
Занумеруємо точки в порядку, в якому вони лежать на прямій (зліва-направо). При переході від 50-ї точки до 51-ї рівно 50 відстаней зменшуються на відстань між 50-ою та 51-ою точками, і рівно 50 відстаней збільшуються на цю ж саму величину. Отже, сума відстаней не змінюється. Таким чином, суми відстаней від 50-ої та від 51-ої точок до всіх інших рівні.

Відповідь. Не можуть.

3. Знайдіть найбільшу кількість восьмикутників, на яку можна розрізати по лініях сітки квадрат 8 на 8.

Розв'язання:

Простим перебором варіантів отримаємо, що наші 8-кутники не можуть складатися з 1, або 2, або 3, а мають містити хоча б 4 одиничні квадратики. Отже, найбільша їх можлива кількість дорівнює 64 : 4 = 16. Покажемо, що цього можна досягти, наприклад так (див. рисунок).

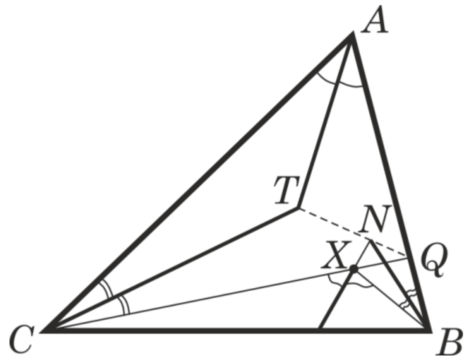


Відповідь. 16.

4. Довільна точка X лежить всередині трикутника ABC. Бісектриси кутів BAC та ACX перетинаються в точці T, а прямі, які містять бісектриси кутів BXC та XBQ — в точці N. Нехай Q — точка перетину променя CX зі стороною AB. Доведіть, що точки T, N, Q належать одній прямій. (*Олексій Карлюченко*)

Розв'язання:

Оскільки AT та CT є бісектрисами трикутника ACQ, то точка T їхнього перетину є інцентром цього трикутника. Тому QT є бісектрисою кута AQC.

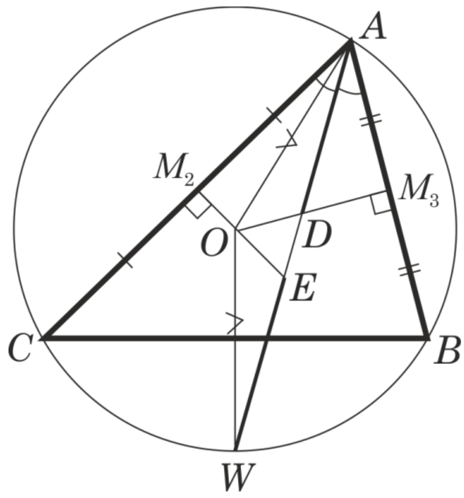


Розглянемо далі трикутник BXQ. Для нього BN є бісектрисою внутрішнього кута, а XN виявляється бісектрисою зовнішнього кута, суміжного із внутрішнім кутом QXB. Отже, точка N — центр зовнівписаного кола трикутника BXQ, яке дотикається до сторони XQ. Таким чином, QN має бути бісектрисою зовнішнього кута, суміжного із внутрішнім кутом XQB. Тобто QN — також бісектриса кута AQC.

Отже, точки T, N, Q належать одній прямій.

5. Точка W — точка перетину бісектриси кута A трикутника ABC та описаного навколо нього кола. На відрізку AW відмічено такі точки D та E, що M_2E та M_3D — серединні перпендикуляри до сторін AC та AB відповідно. Доведіть, що $AD = EW$.

(*Олег Черкаський*)



Розв'язання:

Серединні перпендикуляри M_2E та M_3D перетинаються в центрі O описаного навколо трикутника ABC кола. З'єднаємо O з A та з W. Помітимо, що $OA = OW$ як радіуси описаного кола. Отже, трикутник OAW є рівнобедреним, причому $\angle OAW = \angle OWA$.

З прямокутного трикутника AM_2E $\angle AEM_2 = 90° - \angle EAM_2 = 90° - \frac{1}{2}\angle A$. Отже, суміжний до нього $\angle WEO = 180° - \angle AEM_2 = 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\angle A\right) = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.

З прямокутного трикутника AM_3D $\angle ADM_3 = 90° - \angle DAM_3 = 90° - \frac{1}{2}\angle A$. Отже, суміжний до нього $\angle ADO = 180° - \angle ADM_3 = 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\angle A\right) = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.

Отже $\angle WEO = \angle ADO$.

Тепер у трикутниках ODA та OEW є пара рівних сторін та дві пари рівних кутів. Отже, ці трикутники рівні. Звідси, в свою чергу, й випливає, що $AD = EW$.

7 клас

II тур

6. На чудо-яблуні ростуть червоні, жовті та 2 зелені яблука. У червні половина червоних яблук пожовтіла, в липні половина жовтих яблук стали зеленими, а в серпні – половина зелених яблук стала червоними. Виявилось, що кількість червоних яблук за літо не змінилась. Яка найменша кількість жовтих яблук могла рости на яблуні спочатку?

Розв'язання:

Складемо таблицю за умовою задачі, позначивши x і y невідому початкову кількість червоних та жовтих яблук відповідно.

	червоні	жовті	зелені
було спочатку	x	y	2
стало в кінці червня	$\frac{1}{2}x$	$y+\frac{1}{2}x$	2
стало в кінці липня	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}x$	$2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}x$
стало в кінці серпня	$1+\frac{1}{4}y+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}x$	$1+\frac{1}{4}y+\frac{1}{8}x$

За умовою, маємо рівняння: $1+\frac{1}{4}y+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}x=x$; $\frac{3}{8}x=1+\frac{1}{4}y$; $3x=8+2y$. Звідси, враховуючи, що x і y - цілі числа, маємо, що $8+2y$ - кратне 3. А отже, y дає остачу 2 при діленні на 3. Найменшим таким числом є число 2. Тоді $x=4$.

Відповідь. 2.

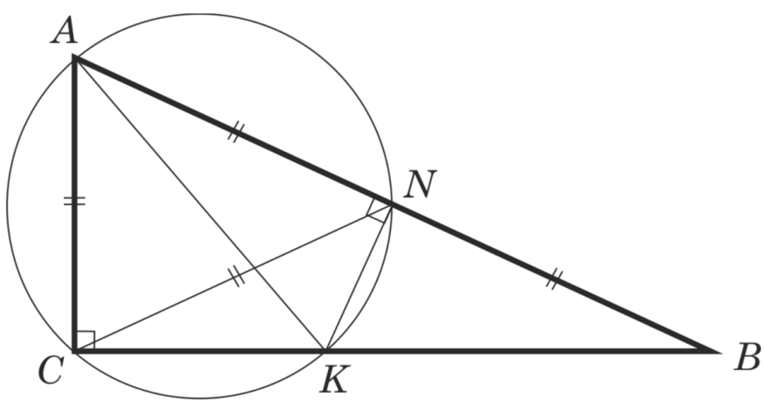
7. Знайдіть значення виразу: $\frac{1\cdot2+2\cdot3+\cdots+2016\cdot2017+2017\cdot2018}{1^2+3^2+\cdots+2017^2}$.

Розв'язання:

Розглянемо чисельник даного дробу та винесемо за дужки спільний множник – число 2. Маємо: $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6+6\cdot7+7\cdot8+\cdots+2016\cdot2017+2017\cdot2018=2(1+3+3\cdot2+2\cdot5+5\cdot3+3\cdot7+7\cdot4+\cdots+1008\cdot2017+2017\cdot1009)=2\big(1+3(1+2)+5(2+3)+7(3+4)+\cdots+2017(1008+1009)\big)=2(1^2+3^2+\cdots+2017^2)$. Скоротимо дріб і отримаємо відповідь.

Відповідь. 2.

8. У прямокутному трикутнику ABC $\angle A=60°$. Точка N — середина гіпотенузи AB. Радіус кола, описаного навколо трикутника ANC, дорівнює R. Знайдіть довжину катета BC. (*Олексій Пахомов*)



Розв'язання:

Нехай коло, описане навколо трикутника ANC, перетинає відрізок BC у точці K. У такому разі AK є діаметром цього кола, оскільки воно є одночасно й описаним навколо прямокутного трикутника *ACK* (центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить в середині його гіпотенузи). Отже, *AK* = 2*R*, а $\angle ANK = 90°$ (за тією ж властивістю прямокутного трикутника).

CN є медіаною трикутника *ABC*, проведеною до гіпотенузи. Звідси *CN* = *AN* = *NB*. Трикутник *ANC* — рівнобедрений з кутом 60°, а отже, рівносторонній. Тому *AN* = *AC*.

Прямокутні трикутники *ACK* та *ANK* рівні за катетом та гіпотенузою. Отже, $\angle CAK = \angle NAK = \frac{1}{2}\angle A = 30°$.

У прямокутному трикутнику *ACK* *CK* — катет, який лежить навпроти кута 30°, тому він рівний половині гіпотенузи. Тобто $CK = \frac{1}{2}AK = R$.

Помітимо тепер, що трикутник *AKB* — рівнобедрений, оскільки у ньому *KN* є одночасно висотою та медіаною. Отже, *KB* = *AK* = *2R*.

У результаті, *BC* = *CK* + *KB* = *R* + 2*R* = 3*R*.

8 КЛАС

1. Відомо, що при будь-якому цілому $K \neq 27$ число $a - K^3$ ділиться без остачі на $27 - K$. Знайти a.

Розв'язок:

Помітимо, що

$$\frac{a - K^3}{27 - K} = \frac{a - 27^3}{27 - K} + \frac{27^3 - K^3}{27 - K} = \frac{a - 27^3}{27 - K} + 27^2 + 27K + K^2$$

Тому, число $\frac{a-27^3}{27-K}$ – ціле при будь-якому $K \neq 27$, тобто число $a - 27^3$ ділиться на будь-яке ціле число, відмінне від нуля, а тому, $a = 27^3$.

Відповідь: $a = 27^3$.

2. Сума чотирьох чисел *a, b, c, d* дорівнює 0. Доведіть, що хоча б одно з чисел

$|ab - cd|, |ac - bd|, |ad - bc|$

не є добудком трьох простих чисел.

Розв'язок:

За умовою $-d = a + b + c$. Тому

$$|ab - cd| = |ab + c(a + b + c)| = |(a + c)(b + c)|.$$

Аналогічно,

$$|ac - bd| = |(a + b)(b + c)|$$

Та

$$|ad - bc| = |bc - ad| = |(a + b)(a + c)|$$

Перемножуючи отримані рівності, знаходимо, що

$$|ab - cd| \times |ac - bd| \times |ad - bc| = ((a + b)(a + c)(b + c))^2.$$

Якщо б кожний зі співмножників у лівій частині останньої рівності був добудком трьох простих чисел, то квадрат у правій частині рівності був би добудком дев'яти простих чисел, що неможливо, бо в квадраті будь-який простий співмножник входить у парній степені.

3. В рядок виписано 23 натуральних числа (не обов'язково різних). Доведіть, що між ними можна так розставити дужки, знак додавання та множення, що значення отриманого виразу буде ділитися на 2000 без остачі.

Розв'язок:

Розіб'ємо дані *23* числа на вісім груп з чисел, що стоять поряд: три групи по п'ять чисел та чотири групи по два числа (в якому порядку ці групи будуть розміщені — неважливо). Кожну групу заключемо в дужки, а між групами розставимо знаки множення. Якщо розставити знаки в середині кожної групи так, щоб результат операції в групі з двох чисел ділився на *2*, а в групі з п'яти чисел – на *5*, то весь вираз буде ділитися на *24*53=2000*.

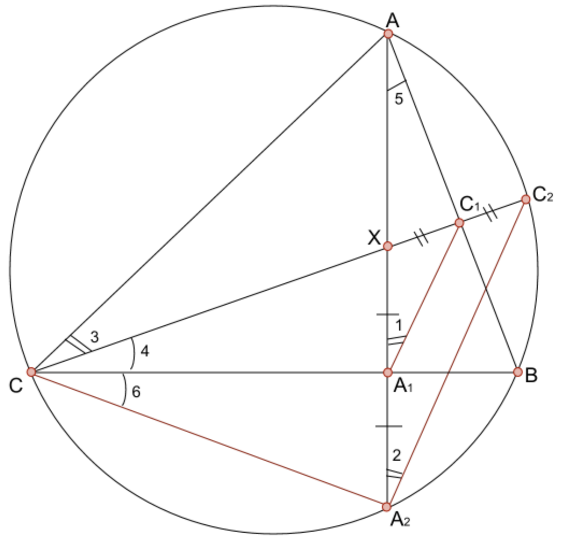
Покажемо, що таке розміщення знаків в групах існує. Якщо числа в групі з двох чисел різної парності, то між ними необхідно поставити знак множення, якщо однакової парності – додавання. Результат, очевидно, буде ділитися на *2*. Розглянемо групу з чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, що йдуть саме в такому порядку. Запишемо остачі від ділення на 5 наступних п'яти сум:

$$a_1,\ \ a_1+a_2,\ \ a_1+a_2+a_3,\ \ a_1+a_2+a_3+a_4,\ \ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.$$

Якщо одна з остач дорівнює *0*, то відповідна сума ділиться на *5*. В цьому випадку необхідно розставити знаки додавання між числами, що входять в цю суму, саму суму (якщо необхідно) заключити в дужки, а всі проміжки між числами, що залишаться заповнити знаками множення. Якщо ж ні одна з остач не дорівнює *0*, то згідно принципу Діріхлє, серед них знайдуться дві однакових остачі. Нехай, наприклад, суми $a_1+...+a_i$ и $a_1+...+a_j$ ($i<j$) дають однакові остачі при діленні на *5*. Тоді їх різниця, що представляє собою суму підряд стоячих чисел $a_i+1+...+a_j$, ділиться на *6*, ми знову розставляємо знаки додавання, заключаємо цю суму в дужки, а позиції, що залишились заповнюємо знаками множення. Таким чином, в будь-якому випадку зможемо розставити знаки в групі з п'яти чисел так, щоб результат ділився на *5*.

4. Навколо трикутника *ABC* описано коло. В середині трикутника взята точка *X*, що прямі *AX* та *CX*, перетинають протилежні сторони трикутника *ABC* та описане коло в таких точках A_1 та A_2, C_1 та C_2, що $XA_1 = A_1A_2$, $XC_1 = C_1C_2$. Довести, що точка *X* співпадає з ортоцентром трикутника *ABC*. *(О. Черкаський)*

Розв'язок:



З'єднаємо A_1 з C_1 та A_2 з C_2. У $\Delta\ XA_2C_2$ відрізок A_1C_1 – середня лінія, тому $\angle XA_1C_1 = \angle XA_2C_2$ та рівні половині дуги AC_2. А тому $\angle\ XA_1C_1 = \angle\ XA_2C_2 = \angle\ ACC_2$. Тому, навколо чотирикутника AC_1A_1C можна описати коло та $\angle C_1CA_1 = \angle C_1AA_1$ і дорівнюють половині дуги A_2B, а тому $\angle C_1CA_1 = \angle C_1AA_1 = \angle BCA_2$. Отримаємо, що в трикутнику CXA_2 медіана CA_1 є і бісектрисою, а тому $CA_1 \perp AA_1$.

5. В трикутнику *ABC* провели пряму *AT* таку, що $\angle CAT = \angle ABT$. *AT* перетинає описане коло в точці *D*. На відрізку *AD* взяли точку *K* таку, що $\angle BAT = \angle ACK$.

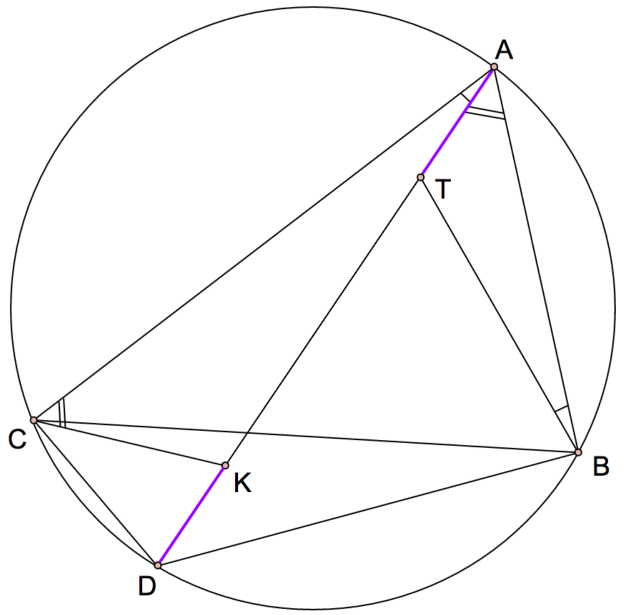
Довести, що $AT = KD$.

Розв'язок:

Кут $\angle KTB$ зовнішній для трикутника ΔATB і дорівнює $\angle A$. Кут $\angle CKD$ зовнішній для трикутника CKA і також дорівнює $\angle A$. Тоді трикутники ΔCKD та ΔTDB подібні (за рівністю кутів; також подібні ΔABC).

Запишемо теорему синусів для трикутників ΔCKD та ΔTBD, з якої отримаємо:

$$\frac{DT}{DB} = \frac{b}{a}, \frac{KD}{DC} = \frac{c}{a} \Rightarrow DT + KD = \frac{b \cdot DB + c \cdot DC}{a} = AD \Rightarrow DK = AT$$



6. На площині задано трикутник ΔABC. Коло k, з центом у точці K, проходить через точки B і C та перетинає сторони AB і AC у точках B\` і $C$\` відповідно. Нехай M і N діаметрально протилежні точки до точки A у колах, описаних навколо трикутників ΔABC і $\Delta AB`C`$ відповідно. Доведіть, що K – середина відрізка MN.

Розв'язок:

Нехай O і O\` – центри кіл, описаних навколо трикутників $\Delta ABC$ і $\Delta AB`C`$ відповідно. Оскільки лінія центрів двох кіл перпендикулярна до їх спільної хорди, то $O`K \perp B`C`$ і $OK \perp BC$.

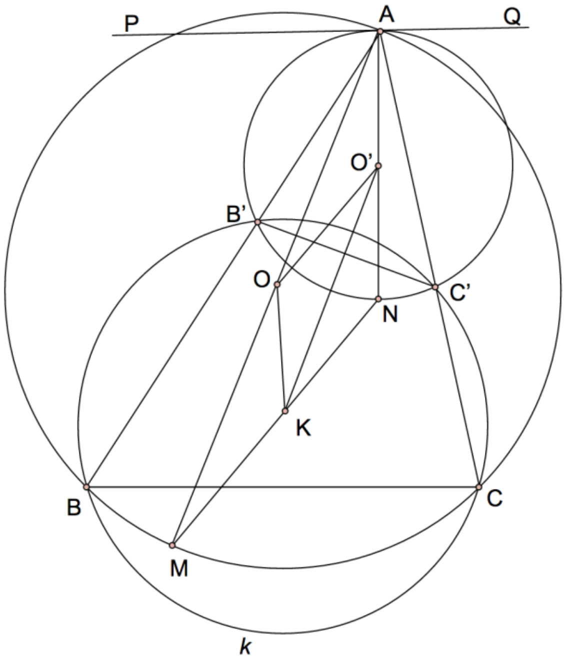
Проведемо дотичну PQ у точці A до описаного кола трикутника $\Delta AB`C`$. Тоді за теоремою про кут між дотичною і хордою та властивостями вписаних кутів, матимемо:

$\angle QAC` = \angle AB`C` = \angle C`CB$,

тобто $\angle QAC = \angle C`CB$. А ця рівність кутів означає, що $PQ \parallel BC$. Так як $PQ$ – дотична, то $Q`A \perp PQ$, а з паралельності PQ і BC випливає, що $AO` \perp BC$. А так як $OK \perp BC$, то $AO` \parallel OK$.

Аналогічно, якщо провести дотичну в точці A до описаного кола трикутника ΔABC, то так само доводиться, що $AO \perp B`C`$. А так як $OK \perp B`C`$, то $AO \parallel O`K$.

Таким чином, $AO` \parallel OK$, $AO \parallel O`K$, тобто $AOKO`$ – паралелограм. Звідси випливає, що його діагоналі $AK$ і $OO`$ точкою перетину діляться навпіл. Нехай S – їх точка перетину. Тоді при гомотетії з центом в точці A і коефіцієнтом $k = 2$ точки O, S, O\` відображаються відповідно у точки $M$, $N$, $K$. Оскільки $S$ – середина $OO`$, то K – середина MN, що і треба було довести.



Командна олімпіада 9-10

1. Країна Флатляндія має форму квадрата зі стороною 100 км, в якому розташовано сім великих міст. Уряд Флатляндії виділив бюджет, достатній для побудови 400 км залізничних шляхів. Чи вистачить цього для поєднання усіх міст країни в єдину залізничну мережу? Відповідь обґрунтуйте.

2. Скільки існує способів розбити числа $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2017}$ на дві групи A та B таким чином, щоб рівняння $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$, де $S(A)$ та $S(B)$ – суми усіх чисел у відповідних групах, мало цілий корінь?

3. Доведіть, що для усіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ та усіх натуральних $n > m$ справедлива нерівність $2|\sin^n(x) - \cos^n(x)| \le 3|\sin^m(x) - \cos^m(x)|$.

4. На нескінченній ігровій мапі із квадратними клітинками деяким чином розташовано 2017 терранських лазерних гармат. Лазерні гармати б'ють на нескінченність по горизонталі, вертикалі або діагоналі. На кожній клітинці мапи, окрім тих, які знаходяться під ударами гармат, розташовано по зергу. На кожному кроці кожен зерг або може залишитись на місці, або переміститись у сусідню клітинку; при цьому два зерги не можуть стояти на одній клітинці, але зерг може стати на клітинку, яку в той час залишає інший зерг. Сарі Керіган вдалось вимкнути всі терранські лазерні гармати. Чи вдасться зергам після цього за скінченну кількість ходів заполонити усю мапу (окрім клітинок, зайнятих власне гарматами)?

5. У різницевому трикутнику ABC $(b+c=2a)$ прямі MI та M_1I перетинають висоту AH_1 в точках K і T відповідно. Знайдіть відношення $AT:TK:KH_1$. (*О. Карлюченко*)

Розв'язок:

За властивістю інцентра ΔABC $\dfrac{AI}{IL_1} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{2}{1}$, тобто $MI \parallel BC$ $\left(\dfrac{AM}{MM_1} = \dfrac{2}{1}\right)$.

Отже, $KH_1 = r$ (r – радіус вписаного в ΔABC кола).

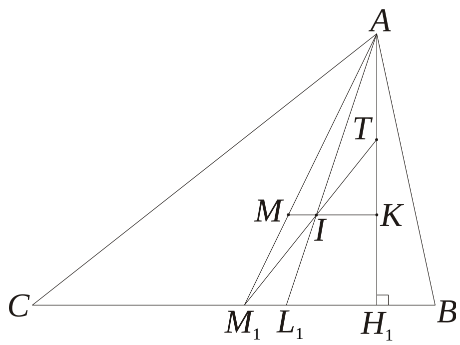
Відомо, що M_1I відсікає від висоти AH_1 відрізок рівний r, тобто $AT = r$.

Площа ΔABC дорівнює $\dfrac{1}{2} AH_1 \cdot a = pr$, звідки

$AH_1 = \dfrac{2pr}{a} = \dfrac{(a+b+c)r}{a} = \dfrac{3ar}{a} = 3r$. Таким чином,

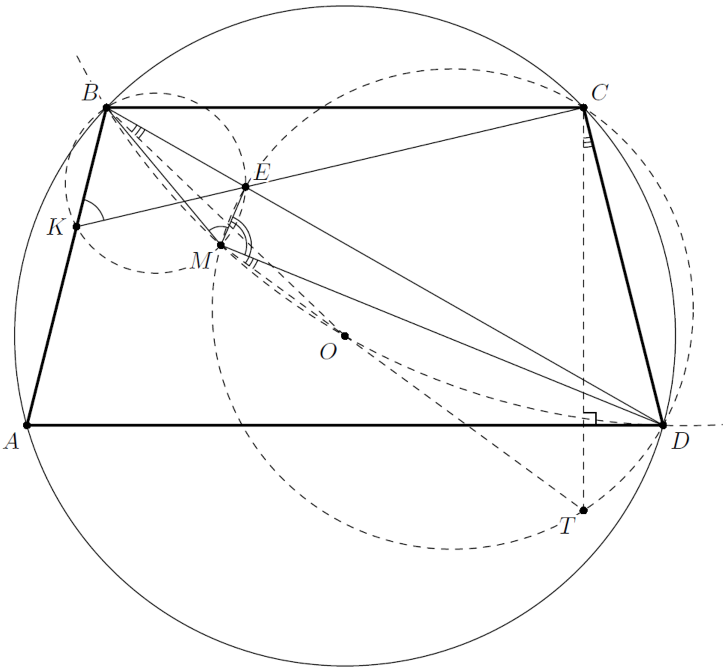
$TK = AH_1 - AT - KH_1 = 3r - r - r = r$. $TK = r$. Отже,

$AT:TK:KH_1 = r:r:r = 1:1:1$.



Відповідь. $1:1:1$.

8. Трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписано в коло. На діагоналі BD довільним чином обрано точку E. Пряма CE перетинає сторону AB в точці K. Позначимо описане коло трикутника CED через ω. Перпендикуляр, що проведено з точки C до AD вдруге перетинає ω в точці N, а описане коло трикутника BKE вдруге перетинає ω в точці M. Доведіть, що пряма TM проходить через центр описаного кола трапеції $ABCD$, якщо точка M належить внутрішній частині трикутника ABD. (*Д. Хілько*)



Розв'язок:

Оскільки $ABCD$ вписана трапеція, то вона рівнобедрена, а $\angle BAD = \angle ADC$. Нехай O – центр описаного кола $ABCD$.

Із вписаних кутів маємо: $\angle BKE = \angle BME$, $\angle EMD = 180° - \angle ECD$. Враховуючи паралельність, $\angle ECD = 180° - \angle BCE - \angle CDA$.

Отже, $\angle BMD = \angle BME + \angle EMD = \angle BKE + 180° - \angle ECD = \angle BKE + \angle BCE + \angle CDA = 180° - \angle ABC + \angle BAD = 2\angle BAD = \angle BOD$.

Таким чином, точки O, M, B, D лежать на одному колі.

Звідси $\angle OMD = \angle OBD = 90° - \angle BAD = 90° - \angle ADC = \angle TCD = \angle TMD$. Значить $\angle OMD = \angle TMD$, і точки M, O, T лежать на одній прямій.

9. Дано трикутник ABC. Кола ω_1 та ω_2 проходять через вершину A і дотикаються сторони BC у вершинах B і C відповідно. На дузі BC описаного кола трикутника ABC взяли точку F. FB повторно перетинає ω_1 в точці K, а FC повторно перетинає ω_2 в точці T. Доведіть, що ортоцентри трикутників ABC, AKF і AFT лежать на одній прямій. (*М. Плотніков*)

Розв'язок:

Нехай D_1, D_2, D_3 та H_1, H_2, H_3 – відповідно основи висот, проведених з вершини A та ортоцентри трикутників ABC, AKF і AFT. За теоремою Сімсона для точки A та трикутника BFC маємо: D_1, D_2, D_3 – одна пряма. Кути AKB і ABC рівні, бо спираються на дугу AB. Аналогічно, кути ATC і ACB теж рівні. Кути AFC и ABC рівні, оскільки спираються на дугу AC. Аналогічно, кути ACB і AFB теж рівні. Тоді трикутники ABC, AKF і AFT подібні. Використовуючи подібність отримаємо, що $AH_1 : H_1D_1 = AH_2 : H_2D_2 = AH_2 : H_2D_2$. І, оскільки D_1, D_2, D_3 лежать на одній прямій, то H_1, H_2, H_3 – теж лежать на одній прямій.

10. Знайти найбільше число q, при якому у площині рівностороннього трикутника існує така точка X, що $AX : BX : CX = 1 : q : q^2$. (*В. Брайман*)

Розв'язок:

Оскільки за нерівністю Птолемея $AX \cdot BC + BX \cdot AC \geq CX \cdot AB$, то $AX + BX \geq CX$, тобто $q^2 \leq q + 1$. Звідси $q \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Залишається показати, що при $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ шукана точка X існує. На дузі AB кола, описаного навколо трикутника ABC, відмітимо точку X, для якої $BX = qAX$ (з міркувань неперервності така точка існує, адже $BX > qAX$, якщо точка X достатньо близько до A, та $BX < qAX$, якщо точка X достатньо близько до B). Для цієї точки у нерівності Птолемея досягається рівність, тому $CX = AX + BX = (1+q)AX = q^2AX$.

Відповідь. $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.